Písemka **P2-2012-A** Dne: 14. prosince 2012

KMA-MAT1 .....

4 1. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}}{n+3}$. $= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}}{n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{3}\,\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+3} =$

$= \left[\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1-0}{\infty} = \dfrac{4}{\infty}\right] = \underline{\underline{0}}$

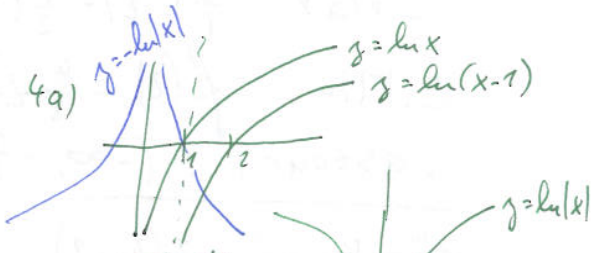
4 2. Napište vždy jednu základní elementární funkci s danou vlastností:

(a) je lichá: $\sin x$

(b) je ohraničená zdola: x^2

(c) její $D(f) = \mathbb{R}^+$: $\ln x$

(d) je ryze monotonní: e^x



3 3. Vypočtěte, případně vyřešte rovnici:

(a) $\log_3 x = 3$, $x = 3^3 = 27$

(b) $\log_b 25 = 2$, $b^2 = 25$, $b = 5$

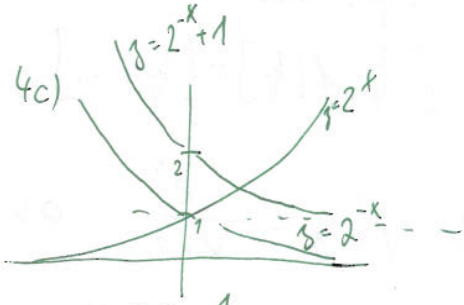
(c) $\log_5 x = 2$. $5^2 = x$, $x = 25$

6 4. Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku):

(a) $y = \ln x$, $y = \ln(x-1)$, $y = -\ln|x|$,

(b) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$,

(c) $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 2^{-x}+1$.



5 5. Určete definiční obor funkce $f : y = \arccos\frac{1-2x}{2}$.

$D(\arccos) = \langle -1; 1\rangle$

$-1 \le \dfrac{1-2x}{2} \le 1$, $-2 \le 1-2x \le 2$

$-2-1 \le -2x \le 2-1$

$-3 \le -2x \le 1 \quad |\cdot -\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} \ge x \ge -\frac{1}{2}$ $\quad \underline{\underline{D(f) = \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle}}$

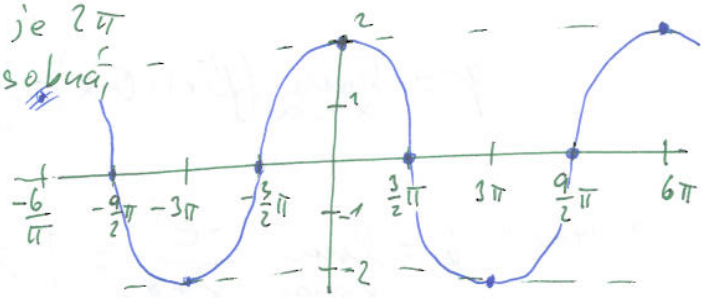
5 6. Určete $D(f)$ a základní periodu funkce a načrtněte graf funkce $f : y = 2\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

$D(f) = \mathbb{R}$ zákl. per. fce ~~cos~~ x je 2π

u fce $\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ bude trojnásobná,

tedy $p_0 = 3(2\pi) = 6\pi$

násobení 2 periodu neovlivní



5 7. Derivujte funkci $f : y = x^3\,e^{2x}$.

$y' = 3x^2\cdot e^{2x} + x^3\cdot e^{2x}\cdot 2$

10 8. Pro funkci $f : y = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 - 4x - 8$ určete $D(f)$, intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

6 9. Najděte všechny asymptoty funkce $f : y = \dfrac{-e^x}{x+1}$.

48

⑧ $f: y = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 - 4x - 8 \qquad D(f) = \mathbb{R}$

$y' = 4x^2 - 6x - 4 = 2(2x^2 - 3x - 2) \qquad D(f') = \mathbb{R}$

$y' = 0, \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$D = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

		$-\frac{1}{2}$		2	
y	↗	L.Max	↘	L.Min	↗
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

L.Max $\quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^3 - 3\cdot(-\frac{1}{2})^2 - 4(-\frac{1}{2}) - 8 = -\frac{4}{3\cdot 8} - \frac{3}{4} + \frac{4}{2} - 8 = -\frac{1}{6} - \frac{3}{4} - 6 = \dots$

L.Min $\quad f(2) = \frac{4}{3}\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2 - 8 = \frac{32}{3} - 12 - 8 - 8 = \dots$

rostoucí: $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(2; +\infty)$ klesající: $(-\frac{1}{2}, 2)$

$y'' = 8x - 6 = 2(4x - 3)$, $y'' = 0$ pro $4x = 3$, $x = \frac{3}{4}$ $\qquad D(f'') = \mathbb{R}$

		$\frac{3}{4}$	
y	$\cap$	infl.	$\cup$
y''	$-$	0	$+$

infl. bod

$[\frac{3}{4}, f(\frac{3}{4})] = [\frac{3}{4}, \dots]$

⑨ $f: y = \frac{-e^x}{x+1}$ as.: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{-e^x}{x+1} = \left[\frac{-e^{-1}}{0^-}\right] = +\infty \Rightarrow$ as. $\boxed{x = -1}$

$x \to -\infty$: $k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{-e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^x}{x^2 + x} = \left[\frac{-0}{\infty}\right] = 0$

$q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^x}{x+1} = \left[\frac{-0}{-\infty}\right] = 0 \longrightarrow \boxed{y = 0}$

$x \to +\infty$: $k = \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x}{x^2 + x} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x}{2x+1} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=}$

$\overset{LP}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x}{2} = \left[\frac{-\infty}{2}\right] = -\infty \Rightarrow$ nemá as. pro $x \to +\infty$.

fce $f: y = \frac{-e^x}{x+1}$ má as. $x = -1$ a $y = 0$ (pro $x \to -\infty$)