Písemka **P2-2012-B**

Dne: 18. prosince 2012

KMA-MAT1

VZOR .....

součet prvních n členů AP

1. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{-2n^2+3n-6}$. $= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{n}{2}(1+(2n-1))}{-2n^2+3n-6} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{-2n^2+3n-6} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2(-2+3/n-6/n^2)} = \left[\dfrac{1}{-2+0-0}\right] = -\dfrac{1}{2}$

2. Napište vždy jednu základní elementární funkci s danou vlastností:

   (a) je lichá: x^3

   (b) je ohraničená: $\sin x$

   (c) její $H(f) = \mathbb{R}^+$: e^x

   (d) je prostá: 2^x

3. Vypočtěte, případně vyřešte rovnici:

   (a) $\log_2 a = 5$, $a = 2^5 = 32$

   (b) $\log_b 81 = 2$, $b^2 = 81 \Rightarrow b = 9$ (b musí být >0, tedy nelze $b=-9$)

   (c) $\log_5 0{,}25 = c$, $5^c = 0{,}25 \Rightarrow$ „přehmat" v zadání, nekla sifikováno

   (d) $\log_3(x-\sqrt{17}) + \log_3(x+\sqrt{17}) = \log_3(x+3)$. $\rightarrow \log_3(x-\sqrt{17})\cdot(x+\sqrt{17}) = \log_3(x+3)$

   $x^2 - 17 = x+3$

   $x^2 - x - 20 = 0$ $D = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-20) = 81$

   $x_{1/2} = \dfrac{1\pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \\ -4 \notin D(\text{rovnice}) \end{cases}$

   $(\sqrt{17} \doteq 4{,}12 \Rightarrow 5-\sqrt{17} > 0)$

   $(-4-\sqrt{17} < 0)$

4. Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku):

   (a) $y = \sin x$, $y = \sin(x-\pi)$, $y = -2\sin x$,

   (b) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x+2}$,

   (c) $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

5. Určete definiční obor funkce $f : y = \dfrac{25\sin x}{\ln(2x^2-8x+8)}$.

   $\ln(2x^2-8x+8) \neq 0 \wedge 2x^2-8x+8 > 0$

   $2x^2-8x+8 \neq 1 \wedge 2x^2-8x+8 > 0$

   $x \neq 2$

   $2(x^2-4x+4) = 0$

   $2(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

   $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

   $2x^2-8x+8 = 1$

   $2x^2-8x+7 = 0$

   $D = 64-56 = 8$

   $x_{2,3} = \dfrac{8\pm\sqrt{8}}{4} = 2 \pm \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = 2 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

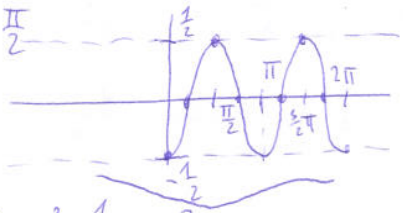
6. Určete $D(f)$ a základní periodu funkce a načrtněte graf funkce $f : y = \dfrac{1}{2}\cos(2x-\pi)$.

   $y = \frac{1}{2}\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $P_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

   dvojnásobná frekvence posun grafu o $\frac{\pi}{2}$ vpravo

   = poloviční per.

   nulový bod $\frac{\pi}{2}$



7. Derivujte funkci $f : y = x^2\ln(5+3x)$.

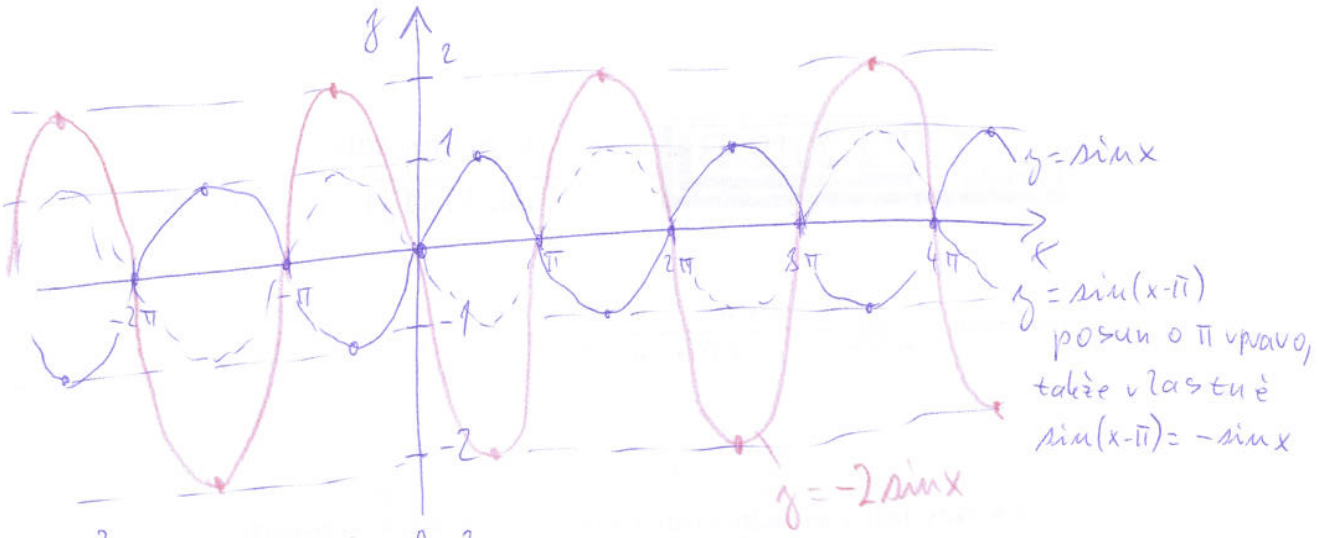
   $y' = (x^2)'\ln(5+3x) + x^2[\ln(5+3x)]' =$

   $= 2x\ln(5+3x) + x^2\dfrac{1}{5+3x}\cdot 3$

8. Pro funkci $f : y = \dfrac{x^2}{x-3}$ určete $D(f)$, intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

9. Najděte všechny asymptoty funkce $f : y = \dfrac{x^2}{x-3}$.

(4)



(8) $f: y = \frac{x^2}{x-3}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$y' = \frac{2x(x-3) - x^2 \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2} \qquad D(f') = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$y' = 0 \iff x(x-6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 6$

$$y'' = \frac{(2x-6)(x-3)^{\cancel{2}\,1} - (x^2-6x)2\cancel{(x-3)}^{1}}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$y'' = \frac{2x^2 - \cancel{6x} - \cancel{6x} + 18 - \cancel{2x^2} + \cancel{12x}}{(x-3)^3}$$

$$y'' = \frac{18}{(x-3)^3} \qquad D(f'') = D(f)$$

y	↗	L.Max	↘		↘	L.Min	↗	
y'	+	0	−		−	0	+	
		0		3		6		

rostoucí: $(-\infty, 0)$, $(6, +\infty)$
klesající $(0; 3)$, $(3; 6)$
L.Max v 0 s hodnotou $f(0) = \frac{0}{0-3} = 0$
L.Min v 6 s hodnotou $f(6) = \frac{36}{6-3} = 12$

y	∩		∪
y''	−	0	+
		3	

konkávní na $(-\infty, 3)$, konvexní na $(3, +\infty)$
inf? nemá

(9) $f: y = \frac{x^2}{x-3}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ bod podezřelý z svislé as.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2}{x-3} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty \Rightarrow \text{svislá as. } \boxed{x = 3}$$

šikmé as.: $k = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \to +\infty}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \to +\infty}} \frac{x}{x-3} = 1$

$$q = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \to +\infty}} (f(x) - kx) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \to +\infty}} \left(\frac{x^2}{x-3} - 1 \cdot x\right) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \to +\infty}} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 3x}{x-3} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \to +\infty}} \frac{3x}{x-3} = 3$$

Pro $x \to -\infty$ i pro $x \to +\infty$ je výpočet prakticky stejný, se stejnými výsledky,

proto má fce f v obou směrech stejnou as. $\boxed{y = x + 3}$