Písemka **P2-2013-A**

Dne: 20. prosince 2013

KMA-MAT/MT/1

VZOR

GP $a_1 = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{4}$, $A_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{4}\,\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) =$

5 1. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}}{2n-1}$. $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{2n-1} = \left[\dfrac{\frac{1}{3}}{\infty}\right] = 0$

4 2. Napište vždy jednu (pokud existuje) základní elementární funkci s danou vlastností:

(a) je lichá a periodická: $\sin x$

(b) je ohraničená zdola a neohraničená shora: x^2

(c) její $D(f) = \mathbb{R}^+$: $\ln x$

(d) je ryze monotonní: x

3 3. Vypočtěte, případně vyřešte rovnici:

(a) $\log_3 x = 3$, $3^3 = x \to x = 27$

(b) $\log_b 25 = 2$, $b^2 = 25$, $b = 5$

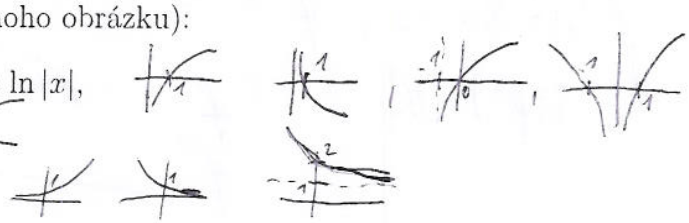
(c) $\log_5 x = 2$. $5^2 = x$, $x = 25$

6 4. Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku):

(a) $y = \ln x$, $-\ln x$, $y = \ln(x+1)$, $y = \ln|x|$,

(b) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$,

(c) $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 2^{-x}+1$.



5 5. Určete definiční obor funkce $f : y = \arcsin \frac{1+2x}{2}$.

$D(\arcsin) = \langle -1, 1\rangle \Rightarrow -1 \le \frac{1+2x}{2} \le 1$, $-2 \le 1+2x \le 2$, $-3 \le 2x \le 1$, $-\frac{3}{2} \le x \le \frac{1}{2}$

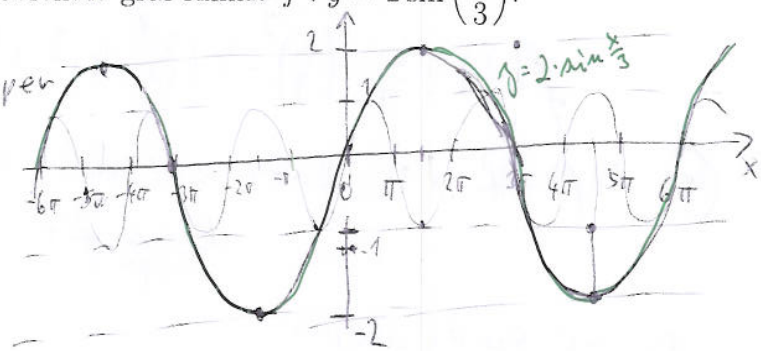
$D(f) = \langle -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

6 6. Určete $D(f)$ a základní periodu funkce a načrtněte graf funkce $f : y = 2\sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

$D(f) = \mathbb{R}$, $\sin x \sim 2\pi$ - per.

$\sin\frac{x}{3} \sim 3\cdot 2\pi = 6\pi$ - per

$2\sin\frac{x}{3} \sim 6\pi$ - per



7 7. Derivujte funkci $f : y = x^3 e^{-x}$.

$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot e^{-x}\cdot(-1) =$

$= 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2 e^{-x}(3-x)$

10 8. Pro funkci $f : y = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 - 4x + 3$ určete $D(f)$, intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

8 9. Najděte všechny asymptoty funkce $f : y = \dfrac{e^x}{x+1}$. $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{-1\} \Leftarrow$ vert. as.?

54

(8) $f(x)=\frac{4}{3}x^3-3x^2-4x+3$, $D(f)=\mathbb{R}$

$f'(x)=4x^2-6x-4$ $\quad D(f')=\mathbb{R}$

$f'(x)=0$, $2(2x^2-3x-2)=0$

$D=9-4\cdot2\cdot(-2)=9+16=25=5^2$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm5}{4}=\begin{cases}2\\-\frac{1}{2}\end{cases}$$

		$-\frac{1}{2}$		2	
$f(x)$	$\nearrow$	L.Max	$\searrow$	L.Min	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

klesající: $\langle-\frac{1}{2},2\rangle$

rostoucí: $(-\infty,-\frac{1}{2}\rangle$, $\langle2,+\infty)$

L.Max v bodě $-\frac{1}{2}$ o hodnotě $f(-\frac{1}{2})=$
$=\frac{4}{3}\cdot(-\frac{1}{8})-3\cdot\frac{1}{4}-4\cdot(-\frac{1}{2})+3=$
$=-\frac{1}{6}-\frac{3}{4}+2+3=5-\frac{11}{12}=\underline{4\frac{1}{12}}$

L.Min v bodě 2 o hodnotě $f(2)=\frac{4}{3}\cdot8-3\cdot4-4\cdot2+3=$
$=\frac{32}{3}-12-5=$
$=10\frac{2}{3}-17=\underline{-6\frac{2}{3}}$

$f''(x)=8x-6$, $f''(x)=0\rightarrow 2(4x-3)=0$, $x_3=\frac{3}{4}$

$D(f'')=\mathbb{R}$

		$\frac{3}{4}$	
f	$\frown$	infl.	$\smile$
f''	$-$	0	$+$

konkávní na $(-\infty,\frac{3}{4}\rangle$, konvexní na $\langle\frac{3}{4},+\infty)$,

inflexe v $\frac{3}{4}$, infl. bod $[\frac{3}{4},f(\frac{3}{4})]=[\frac{3}{4},-\frac{9}{8}]$

$f(\frac{3}{4})=\frac{4}{3}\cdot(\frac{3}{4})^3-3\cdot(\frac{3}{4})^2-4\cdot\frac{3}{4}+3=\frac{9}{16}-\frac{27}{16}=-\frac{18}{16}=-\frac{9}{8}$

(9) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, vert. as. může být jen v $x=-1$:

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{e^x}{x+1}=\left[\frac{1/e}{0^-}\right]=-\infty\Rightarrow$ vert. as. $\underline{\underline{x=-1}}$

as. se směrnicí:

pro $x\to-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x}{x+1}}{x}=\left[\frac{\frac{0}{-\infty}}{-\infty}\right]=0=k$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x+1}-0\cdot x\right)=\left[\frac{0}{-\infty}\right]=0$ $\Big\}$ as. $y=0$ pro $x\to-\infty$

pro $x\to+\infty$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{LP}{=}$

$\overset{LP}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{LP}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\left[\frac{\infty}{2}\right]=\infty$

neex. as. pro $x\to\infty$