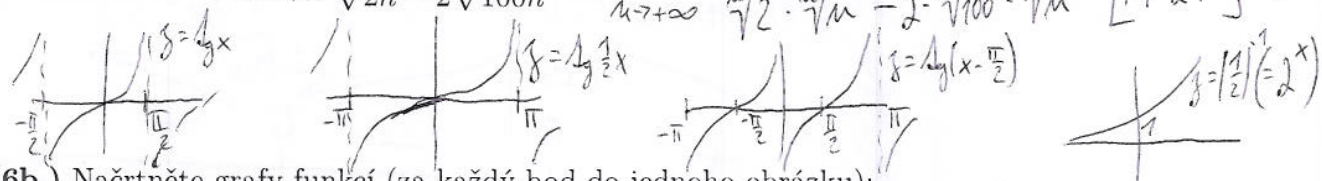
Písemka **P2-2012-H**

Dne: 15. ledna 2014

KMA-MAT/MT/1

VZOR .....

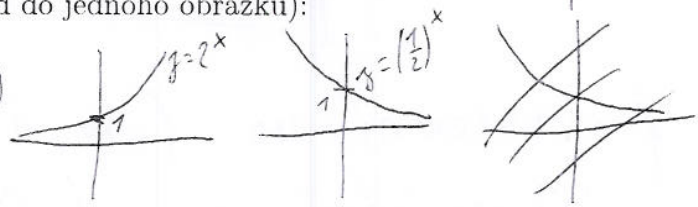
1. **(5b.)** Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{0{,}6}}{\sqrt[n]{2n} - 2\sqrt[n]{100n}}$. $= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{0{,}6}}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n} - 2\cdot\sqrt[n]{100}\cdot\sqrt[n]{n}} = \left[\dfrac{1}{1\cdot1-2\cdot1\cdot1}\right] = -1$



2. **(6b.)** Načrtněte grafy funkcí (za každý bod do jednoho obrázku):

   (a) $y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x, \quad y = \operatorname{tg}(x - \dfrac{\pi}{2})$

   (b) $y = 2^x, \quad y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, \quad y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$.



3. **(6b.)** Určete definiční obor funkce $f : y = 6x^3 \arcsin(2x) + \ln(x-1)$.

$D(6x^3) = \mathbb{R}$ $\qquad D(\ln) = (0,+\infty) \Rightarrow 0 < x-1 \Rightarrow x > 1$

$D(\arcsin) = \langle -1, 1\rangle \Rightarrow -1 \le 2x \le 1$

$-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ $\qquad D(f) = \mathbb{R} \cap \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle \cap (1, +\infty) = \emptyset$

4. **(10b.)** Derivujte funkce $f : y = \operatorname{arctg} 2x$ a $g : y = \operatorname{cotg}(3\sin x)$.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)' = \dfrac{1}{1+4x^2}\cdot 2$, $\quad g'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2(3\sin x)}\cdot(3\sin x)' = \dfrac{-1}{\sin^2(3\sin x)}\cdot 3\cdot\cos x$

5. **(6b.)** Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty}(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} x)$. $= \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{2}$

6. **(10b.)** Pro funkci $f : y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ určete $D(f)$, intervaly ryzí monotonnosti, lokální extrémy, intervaly konvexity a konkavity, inflexe a inflexní body.

7. **(7b.)** Najděte všechny asymptoty funkce $f : y = \dfrac{2}{x^2-1}$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

a) svislé as.: jediné podezřelé body $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$

(jinak je fce f spojitá)

$x_1 = -1$: $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{2}{x^2-1} = \left[\dfrac{2}{1^+-1} = \dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty \Rightarrow$ sv. as. $x = -1$

$x_2 = 1$: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{2}{x^2-1} = \left[\dfrac{2}{1^--1} = \dfrac{2}{0^-}\right] = -\infty \Rightarrow$ sv. as. $x = 1$

b) šikmé as.: $y = kx + q$

pro $x \to +\infty$: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2}{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^3-x} = 0$

$q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x^2-1} - 0\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^2-1} = 0$

podobně pro $x \to -\infty$ se stejnými výsledky $\Rightarrow$

šikmá as. $y = 0$ pro oba směry.

(6) $f: y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5, \quad D(f) = \mathbb{R}$

1. derivace: $f'(x) = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 - 2\cdot 2x + 3 = x^2 - 4x + 3$

$D(f') = \mathbb{R}$

$f'(x) = 0: \quad x^2 - 4x + 3 = 0$

$D = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 16 - 12 = 4 = 2^2 \qquad x_{1/2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

f	↗	L.Max	↘	L.Min	↗	
f'	+	0	−	0	+	
		1		3		

f je rostoucí na $(-\infty, 1\rangle$ a $\langle 3, +\infty)$

klesající na $\langle 1, 3\rangle$

má L.Max v bodě 1 s hodnotou $f(1) = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 5 = -\frac{11}{3}$

L.Min v bodě 3 s hodnotou $f(3) = 9 - 18 + 9 - 5 = -5$

2. derivace: $f''(x) = 2x - 4 \qquad D(f'') = \mathbb{R}$

$f''(x) = 0, \quad 2x - 4 = 0 \Rightarrow x_3 = 2$

f	∩	inf.	∪
f''	−	0	+
		2	

fce f je konkávní na $(-\infty, 2\rangle$

a konvexní na $\langle 2, +\infty)$

má inflexi v bodě 2 a graf

má inflexní bod o souřadnicích

$[2, f(2)] = [2, \frac{1}{3}\cdot 8 - 8 + 6 - 5] = [2, -\frac{13}{3}]$