Úvod do teorie obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic

Jiří Fišer

Olomouc 2013

Oponenti: Mgr. Bohumil Krajc, Ph.D.
Bc. et RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

Tato publikace vznikla za podpory projektu MAPLIMAT-Modernizace studia aplikované matematiky, na PřF Univerzity Palackého v Olomouci (č. CZ.1.07/2.2.00/15.0243), projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

1. vydání

ISBN 978-80-244-3401-8

Předmluva

Tento učební text je určen studentům 2. ročníku bakalářského studia aplikované matematiky na katedře matematické analýzy a aplikací matematiky. Jeho cílem je představit studentům tohoto studijního programu, na elementární úrovni, základní pojmy a výpočetní postupy z teorie obyčejných *diferenciálních* a *diferenčních* rovnic.

U obou typů je důraz kladen zejména na tzv. *lineární rovnice* a dostatečný počet řešených příkladů.

Text vznikal několik let jako záznam přednášek v předmětu Matematika 3.

Při závěrečné kompletaci jsem využil v části *Obyčejné diferenciální rovnice* publikaci [1] ke zpřesnění teoretických partií. Další doporučené studijní zdroje uvádím v seznamu použité literatury (například [5] a [8]).

Část *Diferenční rovnice* má významný zdroj ve vynikající knize [2].

V úvodech jednotlivých kapitol se setkáte s následujícími ikonami, které by měly usnadnit práci s předloženým textem:

Cíle: Na začátku každé kapitoly naleznete konkrétně formulované cíle. Jejich prostřednictvím získáte představu o tom, čemu budete po nastudování příslušného oddílu rozumět a co budete schopni dělat.

Motivace: Odstavec, v němž by mělo být vysvětleno, proč se danou problematikou vůbec hodláme zabývat. Má vás motivovat k tomu, abyste studovali právě tuto pasáž.

Na konečném tvaru textu se významně podíleli recenzenti, ať už ti oficiální, Mgr. Bohumil Krajc, Ph.D. a RNDr. Jan Tomeček, Ph.D., tak i prof. RNDr. Svatoslav Staněk, CSc a prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc. Rád bych jim zde za to vyjádřil veliký dík.

V neposlední řadě děkuji za podporu projektu MAPLIMAT - Modernizace studia aplikované matematiky na PřF Univerzity Palackého v Olomouci (číslo projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0243), který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Leden 2013

Jiří Fišer

Obsah

Část I
Obyčejné diferenciální rovnice

1 Úvodní motivační příklad

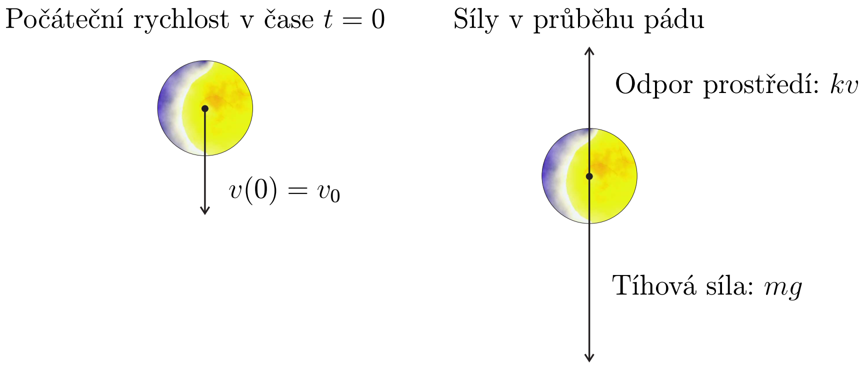
Po prostudování této kapitoly zjistíte, k čemu mohou být diferenciální rovnice užitečné. Jak se pomocí nich dá modelovat praktický problém a co nám přináší jejich řešení.

Praktická motivace je vždy ta nejlepší.

Než si přesně nadefinujeme, co to vlastně obyčejné diferenciální rovnice jsou, uvedeme si dva ilustrační příklady.

Příklad 1.1 (Vrh tělesem svisle dolů) Těleso o hmotnosti m vrhneme svisle dolů s počáteční rychlostí v_0 a budeme zkoumat, jak se mění jeho rychlost $v = v(t)$ v následujícím čase $t \geq 0$, jestliže počítáme s odporem vzduchu s koeficientem k.

Řešení. Na padající těleso působí zemská tíže (urychluje pád) a současně odpor vzduchu (zpomaluje pád). Zatímco zemskou tíži považujeme za konstantní (mg), tak odpor vzduchu závisí přímo úměrně na aktuální rychlosti (kv). Jiné síly působící na těleso neuvažujeme.



Obrázek 1: Grafické znázornění situace padajícího tělesa.

Pokud na těleso působí nějaká nenulová síla, uděluje mu zrychlení. Závislost této síly F, hmotnosti tělesa m a jeho zrychlení a popisuje druhý Newtonův zákon:

$$m \cdot a = F.$$

Hmotnost tělesa m je dána, zrychlení $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ vyjádříme jako derivaci aktuální rychlosti a $F = mg - kv$ je součet uvažovaných sil (síla působící směrem k Zemi je brána kladně, v opačném směru záporně). Po dosazení do rovnice druhého Newtonova zákona:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv. \tag{1.1}$$

V této rovnici se vyskytuje derivace neznámé (hledané) funkce $v = v(t)$ a je to příklad tzv. lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Rovnice tohoto typu se v průběhu semestru naučíme řešit (=najít funkce, které dané rovnici vyhovují). V tuto chvíli si ukážeme, k čemu lze při řešení takové rovnice dojít. Uvedeme si jednoparametrickou třídu funkcí, které všechny (se svými derivacemi) vyhovují rovnici (1.1) pro $t \geq 0$:

$$v = v(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \qquad c \in \mathbb{R},\ t \in [0, \infty)\,. \tag{1.2}$$

Zkusme tuto skutečnost ověřit. Abychom mohli dosadit řešení (1.2) do rovnice (1.1), potřebujeme vypočíst derivaci rychlosti

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left[c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right]' = -c\frac{k}{m} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

Dosadíme do levé strany (1.1) a upravíme:

$$L = m \cdot \left(-c\frac{k}{m} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right) = -c \cdot k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

Podobně pro pravou stranu (1.1) po dosazení dostaneme:

$$P = mg - k\left(c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right) = -c \cdot k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

Tedy $L = P$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ a $t \in [0, \infty)$.

Jelikož $c \in \mathbb{R}$, existuje nekonečně mnoho řešení (funkcí), které vyhovují rovnici (1.1) na intervalu $[0, \infty)$. Čím se liší? Co představují? Jak mezi nimi rozlišovat? Klíčem bude zatím nezapočítaná počáteční rychlost v_0. Mezi všemi možnými řešeními budeme vybírat jen ta, která splňují počáteční podmínku $v(0) = v_0$. Uvidíme, že bude právě jedno:

$$\begin{aligned} v(0) &= v_0, \\ c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}0} + \frac{mg}{k} &= v_0, \\ c + \frac{mg}{k} &= v_0, \\ c &= v_0 - \frac{mg}{k}. \end{aligned}$$

Dosadíme zpět do (1.2):

$$v = v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \qquad t \in [0, \infty)\,. \tag{1.3}$$

Řešení (1.2) nazýváme obecné (zahrnuje všechna řešení), zatímco řešení (1.3) nazýváme partikulární.

Na závěr prozkoumáme dva limitní stavy partikulárního řešení, pro $k \to 0^+$ (zanedbání odporu vzduchu)

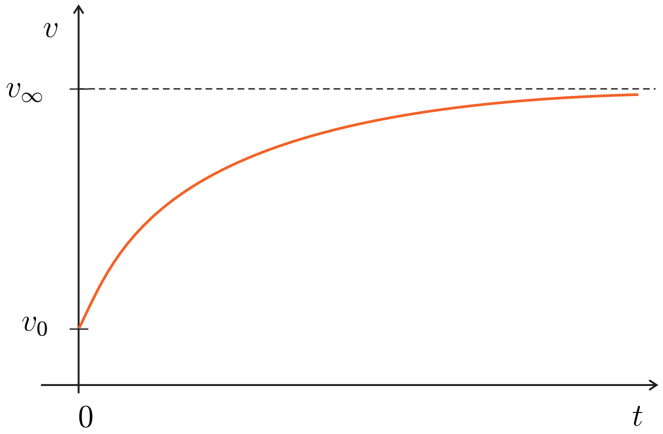
$$\lim_{0<k\to 0^+} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right] = v_0 + gt.$$

a pro $t \to \infty$ (limitní chování rychlosti v čase)

$$v_\infty := \lim_{t\to\infty} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right] = \frac{mg}{k}.$$

Zde je v_∞ limitní (konstantní) rychlost, při které se odpor vzduchu vyrovná s tíhovým zrychlením.

Na obrázku 2 je znázorněn vývoj rychlosti padajícího tělesa při počáteční rychlosti $v_0 < v_\infty$.



Obrázek 2: Graf rychlosti padajícího tělesa $v = v(t)$, kde $v(0) = v_0$ značí počáteční rychlost a v_∞ je rychlost limitní.

□

Dalším ilustrativním příkladem, tentokrát z ekonomické oblasti, bude určování ceny zboží (jako funkce času), při které nastává rovnováha mezi nabídkou a poptávkou.

Příklad 1.2 (Rovnovážná cena, [1]) Označíme $p = p(t)$ jednotkovou cenu nějakého zboží v čase t, $q_d = q_d(t)$ je poptávková funkce a $q_s = q_s(t)$ je nabídková funkce.

Předpokládáme, že veličiny q_d a q_s závisí lineárně na ceně p a rychlosti její změny (vyjádřené její derivací), tedy na p'

$$\begin{aligned} q_s &= a_0 + a_1 p + a_2 p', \\ q_d &= b_0 + b_1 p + b_2 p', \end{aligned}$$

přitom uvažujeme, že $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ a současně $a_1 \neq b_1$ a $a_2 \neq b_2$.

Rovnováha nastává, když $q_d = q_s$, tedy

$$a_0 + a_1 p + a_2 p' = b_0 + b_1 p + b_2 p'.$$

Po úpravě dostaneme

$$(a_2 - b_2)p' + (a_1 - b_1)p = (b_0 - a_0),$$

což je typově tzv. lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Rovnice tohoto typu budeme umět řešit. Sami tedy budeme schopni zjistit, že řešením této rovnice je celá třída funkcí

$$p(t) = C \exp\left(-\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} t\right) + \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Pokud bychom chtěli, aby cena $p(t)$ na počátku, tedy v čase $t = 0$, byla K, přidáme podmínku

$$p(0) = K. \tag{1.5}$$

$p(0)$ získáme z (1.4), když za t dosadíme nulu. Takto, po dosazení do (1.5), dostáváme rovnici

$$C \exp\left(-\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} 0\right) + \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1} = K,$$

tedy

$$C + \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1} = K \quad \Longrightarrow \quad C = K - \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}.$$

Získané C dosadíme zpětně do (1.4) a dostaneme tzv. partikulární řešení, které splňuje podmínku p(0)=K:

$$p(t) = \left(K - \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}\right) \exp\left(-\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} t\right) + \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}.$$

Tato funkce představuje rovnováhu mezi nabídkou a poptávkou.

1) V případě, že $\dfrac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} > 0$, bude $\lim\limits_{t \to \infty} p(t) = \dfrac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}$, což znamená, že cena daného zboží se limitně blíží k této hodnotě.

2) V případě, že $\dfrac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} < 0$, bude $\lim\limits_{t \to \infty} p(t) = \infty$, což znamená, že cena daného zboží roste nade všechny meze.

$\square$

2 Diferenciální rovnice — základní pojmy

Jak jsme si ilustrovali na předchozích ukázkách, při praktických úlohách často potřebujeme nalézt neznámou funkci, jejíž vlastnosti jsou popsány pomocí jejích derivací, zasazených do nějaké rovnice. Takovou rovnici pak nazýváme *diferenciální rovnice.*

Poznámka 2.1 V matematice i v aplikacích se pracuje

- s *obyčejnými diferenciálními rovnicemi*, to jsou ty, kde neznámá funkce je funkcí jedné nezávisle proměnné a derivace neznámé funkce je obyčejnou derivací,
- a také s *parciálními diferenciálními rovnicemi*, kde neznámá funkce je funkcí více proměnných a její derivace jsou tedy derivacemi parciálními.

V tomto textu se budeme zabývat výhradně obyčejnými diferenciálními rovnicemi, a tak si občas budeme moci dovolit vynechat slovo „obyčejný“ a použít pouze termín „diferenciální rovnice“.

Rovnici

$$F(t, y, y', \dots y^{(n)}) = 0, \tag{2.1}$$

kde

- F je daná funkce $n+2$ proměnných, definovaná na nějaké množině
  $$G = I \times \Omega, \quad ,$$
  kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval[1] a $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
- $t \in I$ je nezávisle proměnná,
- $y = y(t)$ je neznámá funkce, a
- $y', \dots y^{(n)}$ jsou derivace této neznámé funkce y,

nazýváme *obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu.*

Řádem diferenciální rovnice (2.1) rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v (2.1) vyskytuje.

Speciálně, pro $n = 1$, tedy máme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu

$$F(t, y, y') = 0.$$

[1]Interval I může být různého tvaru, například (a, b), $[a, b]$, (a, ∞) nebo $(-\infty, \infty)$.

Nyní si ukážeme tři příklady jednoduchých diferenciálních rovnic, u kterých (jen se znalostí základů diferenciálního a integrálního počtu) budeme schopni určit alespoň některá řešení.

Příklad 2.1 Hledáme funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 2t + \cos t$.

Ukažme, že jde opravdu o diferenciální rovnici. Rovnici $y' = 2t + \cos t$ lze přepsat na $y' - 2t - \cos t = 0$, což můžeme psát jako $F(t, y, y') = 0$, kde funkci F definujeme předpisem

$$F(t, x_1, x_2) = x_2 - 2t + \cos t.$$

Potom skutečně $F(t, y, y') = y' - 2t - \cos t$, a tak dostáváme

$$F(t, y, y') = 0, \qquad I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}, \quad \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

tedy

$$G = I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Podle definice primitivní funkce je hledanou funkcí $y(t)$ každá funkce primitivní k zadané funkci $2t + \cos t$, tedy $y = t^2 + \sin t + C$, kde C je (libovolná) integrační konstanta a $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Příklad 2.2 Najdeme funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y'' = -y$.

Nejprve opět určíme

$$F(t, y, y', y'') = y'' + y, \qquad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

Dále z vlastností derivací funkcí $\cos t$ a $\sin t$ vidíme, že uvedená rovnice je splněna například pro funkci $y_1 = \cos t$, také pro funkci $y_2 = \sin t$, ale rovněž pro

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad \text{kde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ve všech těchto případech nejsou na t žádná definiční omezení (ani v zadání, ani u řešení), a tak můžeme opět vzít $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Příklad 2.3 Najdeme funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 1$, přičemž $y(2) = 5$.

Určíme

$$F(t, y, y') = y' - 1, \qquad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Nejprve si všimněme jen rovnice $y' = 1$; vyhovuje jí každá funkce $y = t + C$, kde $t \in \mathbb{R}$ a C je libovolná konstanta. Použijeme-li nyní uvedenou podmínku, dostaneme $5 = 2 + C$, a z toho $C = 3$. Takže funkce $y = t + 3$, $t \in \mathbb{R}$, vyhovuje jak uvedené rovnici, tak zadané podmínce. $\square$

V našich příkladech jde postupně o obyčejné diferenciální rovnice prvního, druhého a prvního řádu.

Je čas se ptát po přesnější definici pojmu řešení. Jelikož v diferenciální rovnici je neznámou funkce, množinou řešení takové rovnice je množina funkcí. Tyto funkce musí splňovat dva požadavky:

- musí se dát dosadit do rovnice;
  - tedy musí existovat všechny jejich potřebné derivace
  - a mohou nabývat jen takové hodnoty, aby byly v definičním oboru funkce F,
- po jejich dosazení musí být F identicky rovna nule.

Tyto požadavky hledané funkce nemusí splňovat všude ($\forall t \in I$), ale stačí na nějakém intervalu. Proto obvykle hovoříme o řešení diferenciální rovnice na intervalu.

Definice 2.1 (Řešení diferenciální rovnice) Funkce φ, která je n-krát spojitě diferencovatelná na intervalu J, je *řešením diferenciální rovnice* (2.1) na J, jestliže pro každé $t \in J$ platí

$$\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\big) \in G \quad \text{a} \quad F\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\big) = 0.$$

Z této definice vyplývá, že kromě řešení $y = \varphi(t)$ je také třeba určit interval $J \subset I$, na kterém je φ řešením. J nebudeme zjišťovat v tom případě, kdy bude odpovídat přirozenému definičnímu oboru funkce φ.

Poznámka 2.2 ([1])

- Řešení diferenciální rovnice prvního řádu $F(t, y, y') = 0$ se také nazývá *integrál diferenciální rovnice* a jeho graf v rovině (t, y) zase *integrální křivka.*
- Ne vždy se podaří nalézt řešení v explicitním tvaru, a tak integrální křivky mohou být dány i implicitně:
  - explicitně: $y = \varphi(t)$, $t \in J$,
  - implicitně: $H(t, y) = 0$, $(t, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.
- Řešit diferenciální rovnici znamená určit všechna její řešení. Ale ne každá taková rovnice musí být řešitelná.
- Množinu všech řešení naší diferenciální rovnice (2.1) nazýváme *obecné řešení.*[2]
- Obecné řešení (2.1) lze v některých případech (například u lineárních diferenciálních rovnic) vyjádřit ve tvaru

$$y = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad \text{kde} \quad C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

[2]Někteří autoři do obecného řešení nezahrnují tzv. singulární řešení. To je definováno tak, že každým bodem integrální křivky odpovídající tomuto řešení prochází alespoň jedna další integrální křivka příslušné diferenciální rovnice. Příkladem singulárního řešení je funkce $y \equiv 0$ v příkladu 3.5 na straně 20.

- Když z obecného řešení vybereme jedno konkrétní (například volbou konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$), hovoříme o *partikulárním řešení*[3].

Příklad 2.4 Zjistěte, zda funkce

$$y = 1 + e^x + x - \frac{1}{2}x^2$$

je řešením diferenciální rovnice

$$y'' - y' - x = 0$$

a na jaké množině (intervalu).

[Není řešením. Drobnou úpravou (jedno znaménko) lze tuto funkci upravit na řešení. V takovém případě je řešením na celém $\mathbb{R}$.]

3 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Po prostudování této kapitoly již poznáte obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu a budete umět sestrojit její směrové pole.

Vždy je nejrozumnější začít tím jednodušším a co nejnázornějším.

Z naší předchozí úmluvy víme, že obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu má obecný implicitní tvar

$$F(t, y, y') = 0.$$

Pro naše účely je to tvar zbytečně obecný. Budeme se tedy zabývat rovnicemi, kde je první derivace neznámé funkce vyjádřena explicitně (jsou zapsány v tzv. normálním tvaru):

$$y' = f(t, y). \tag{3.1}$$

Budeme předpokládat, že k rovnici (3.1) existují integrální křivky na nějaké množině

$$G = I \times \Omega, \quad I, \Omega \subset \mathbb{R},$$

kde je funkce f definována.

[3] Singulární řešení lze rovněž chápat jako partikulární řešení.

3.1 Geometrická interpretace obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu — směrové pole

Proměnné t a y z rovnice (3.1) můžeme chápat jako souřadnice bodu (t, y) v rovině ty.

Každému bodu $(t, y) \in G$ je přiřazena hodnota $f(t, y)$ a na základě vztahu (3.1) je tato hodnota spojena s derivací neznámé funkce y'. Vzhledem k tomu, že geometricky derivace udává směr, máme na G pomocí (3.1) definováno tzv. *směrové pole*

$$\left\{\big(t, y, f(t, y)\big); (t, y) \in G\right\},$$

kde uspořádaným trojicím $\big(t, y, f(t, y)\big)$ říkáme *lineární elementy*. Tyto se dají znázornit pomocí krátkých úseček se středem v (t, y) a se směrnicí $f(t, y)$.

Integrální křivky diferenciální rovnice (3.1) mají v každém bodě v G tečnu orientovanou shodně se směrovým polem (směrnice tečny v bodě (t, y) má hodnotu $f(t, y)$)

Křivky v G, ve kterých je

$$y' = f(t, y) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

se nazývají *izokliny*. (Lineární elementy „ležící“ na této křivce mají všechny stejnou směrnici c.)

Příklad 3.1 (Směrové pole) Znázorněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = \dfrac{y}{t}$, a to pomocí izoklin. Dále načrtněte graf jednoho řešení.

Řešení. Pravá strana $f(t, y) = \dfrac{y}{t}$ je definována pro $t \neq 0$ a $y \in \mathbb{R}$. Tím je dáno, že úlohu můžeme uvažovat na dvou oblastech:

$$G_1 = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}, \qquad \text{nebo} \qquad G_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Izokliny jsou ty křivky v G, na kterých je derivace y', a tedy i hodnoty $f(t, y)$, konstantní. Budeme je tedy hledat pomocí rovnice

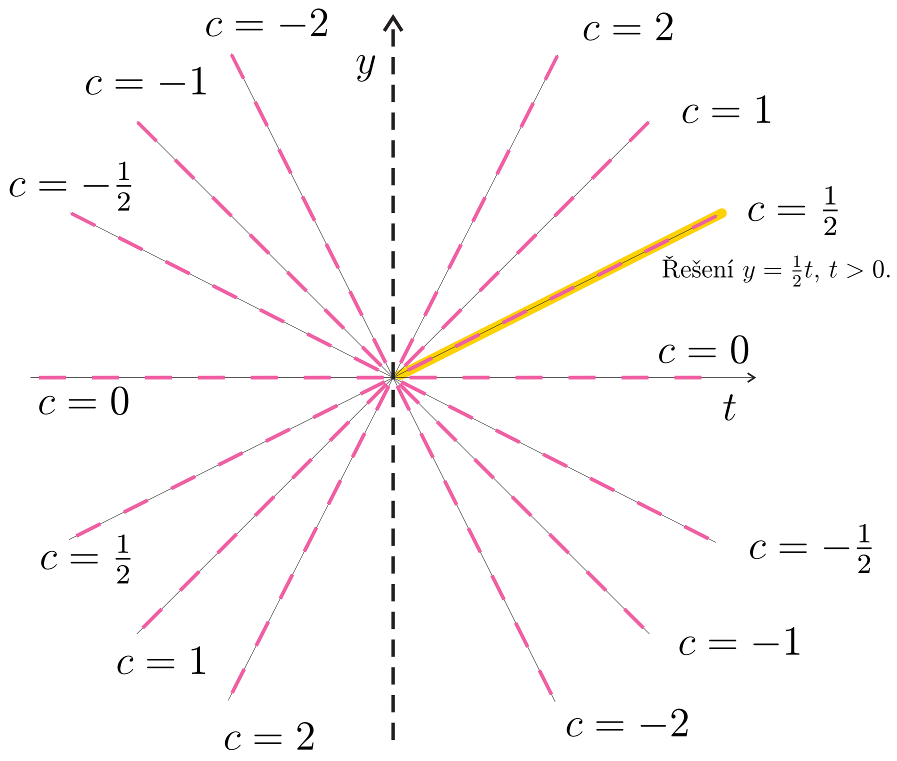
$$\frac{y}{t} = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

odkud (snažíme se explicitně vyjádřit závislost y na t)

$$y = ct, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $c \in \mathbb{R}$ jde o rovnici přímky, která prochází počátkem a má směrnici c. Když vezmeme v potaz podmínku $t \neq 0$ (resp. naše uvažované oblasti G_1 a G_2), tak dostaneme vždy dvě polopřímky, na kterých směrnice lineárních elementů mají totožnou hodnotu c. To znamená, že jsou v dané polopřímce obsaženy.

Současně z toho plyne, že i grafy řešení se s těmito polopřímkami shodují. Vše je graficky znázorněno na obrázku 3. $\square$



Obrázek 3: Směrové pole z příkladu 3.1 sestrojené pomocí izoklin.

Příklad 3.2 (Směrové pole) Znázorněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = t - \sqrt{y}$ pomocí izoklin. Také se pokuste načrtnout graf některého řešení.

Řešení. Pravá strana $f(t, y) = t - \sqrt{y}$ je definována pro $t \in \mathbb{R}$ a $y \geq 0$, tím je dáno

$$G = (-\infty,\infty) \times [0,\infty).$$

Izokliny:

$$t - \sqrt{y} = c, \qquad \text{a tedy} \qquad \sqrt{y} = t - c.$$

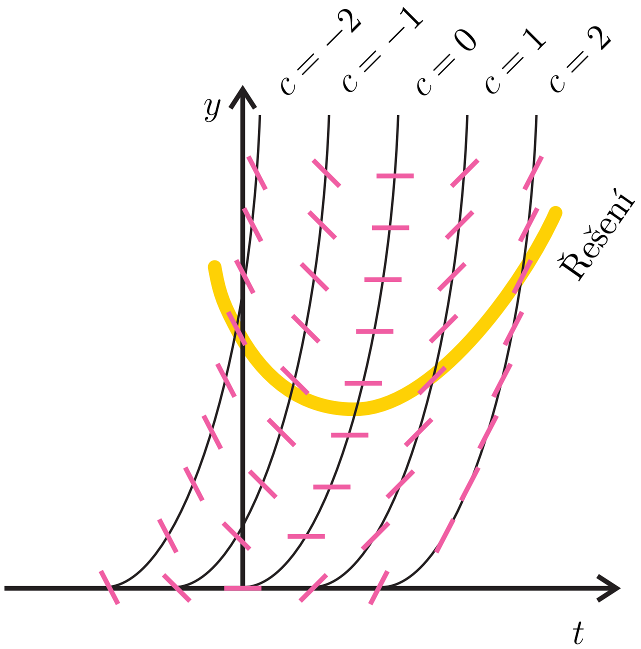
Zde můžeme nahlédnout, že výraz dává smysl jen pro $t \geq c$, neboť levá strana ($\sqrt{y}$) je nutně nezáporná, což samozřejmě musíme požadovat i po pravé straně. Celkově tedy dostaneme:

$$y = (t - c)^2, \quad c \in \mathbb{R}, \ t \geq c.$$

Pro zvolené c tedy půjde o pravou polovinu paraboly s vrcholem (počátkem) v bodě $(c, 0)$.

Vše (i s náčrtkem řešení) je znázorněno na obrázku 4.

$\square$



Obrázek 4: Směrové pole z příkladu 3.2 sestrojené pomocí izoklin.

Příklad 3.3 Znázorněte směrová pole následujících diferenciálních rovnic. Pokuste se načrtnout i graf nějakého řešení.

a) $y' = y - t^2$,

b) $2y' + 2y - t - 3 = 0$,

c) $y' = \dfrac{y}{t-y}$,

d) $y' = t^2 + y^2$,

e) $y' = -\dfrac{t}{y}$.

3.2 Existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy

Často nás ve výsledku nebudou zajímat všechna řešení dané úlohy, ale jen taková, která mají požadovanou vlastnost, splňují určitou podmínku.

Přitom je důležité, zda takové řešení vůbec existuje (existence řešení), a když ano, zda jich nemůže být víc ((ne)jednoznačnost řešení).

Takové podmínky mohou být formulovány různě, my se však zaměříme jen na jeden typ.

Budeme se věnovat tzv. *počáteční podmínce*

$$y(t_0) = y_0, \tag{3.2}$$

která společně s diferenciální rovnicí (3.1) tvoří tzv. *Cauchyovu úlohu*, která je základní úlohou v teorii diferenciálních rovnic.

Definice 3.1 (Cauchyova úloha) Mějme diferenciální rovnici (3.1) a počáteční podmínku (3.2).

Jejich kombinaci, úlohu

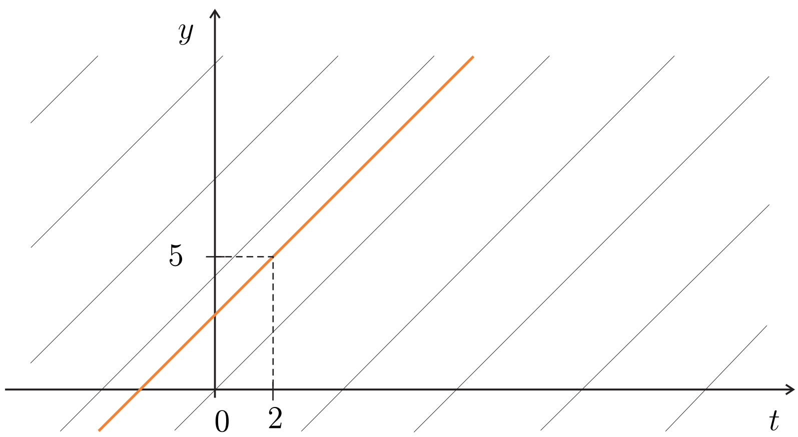
$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \ (t_0, y_0) \in G, \end{cases} \tag{3.3}$$

nazýváme *Cauchyova úloha.*

Za její řešení bereme takové řešení $y = y(t)$ diferenciální rovnice $y' = f(t, y)$, které je definováno na nějakém intervalu J (kde $t_0 \in J$) a splňuje počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$.

Příklad Cauchyovy úlohy je v příkladu 2.3. Integrální křivky z tohoto příkladu představují soustavu navzájem rovnoběžných přímek $y = t + C$, $C \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení dané Cauchyovy úlohy (s počáteční podmínkou $y(2) = 5$) je pak reprezentováno tou přímkou soustavy, která prochází bodem $(2, 5)$.

Vše je znázorněno na obrázku 5.



Obrázek 5: Grafické znázornění řešení (přímky $y = t + C$, $C \in \mathbb{R}$) rovnice $y' = 1$ z příkladu 2.3. Zvýrazněno je řešení $y = t + 3$ splňující počáteční podmínku $y(2) = 5$.

Řešení Cauchyovy úlohy

Uvažujme uzavřenou (obdélníkovou) oblast $D \subset G$, definovanou předpisem

$$D = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

s vnitřním bodem (t_0, y_0), kde a, b jsou daná kladná čísla.

Budeme předpokládat, že pravá strana rovnice (3.1) je na tomto D definovaná a spojitá (v obou proměnných). To nám zajišťuje, že na této uzavřené množině je f omezená. Označíme

$$M = \max_D |f(t, y)|, \qquad h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Přitom předpokládáme, že $f(t, y) \not\equiv 0$, $(t, y) \in D$.

Věta 3.1 (Peanova věta o existenci řešení, [1]) *Nechť pravá strana rovnice (3.1) je spojitá na D vzhledem k oběma proměnným t a y. Potom Cauchyova úloha (3.3) má řešení definované na intervalu $|t - t_0| \leq h$.*

V tomto případě graf řešení zůstává v D.

Pokud ke spojitosti f na D přidáme předpoklad omezené parciální derivace f podle y na D, dostaneme kromě existence i jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy.

Věta 3.2 *Nechť pravá strana rovnice (3.1) splňuje následující dvě podmínky:*

- *je spojitá na oblasti D vzhledem k oběma proměnným t a y ;*
- *má na D spojitou parciální derivaci $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.*

Potom Cauchyova úloha (3.3) má právě jedno řešení $y = y(t)$ definované na intervalu $|t - t_0| \leq h$.

Postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy můžeme schematicky znázornit následovně:

$$f(t, y) \text{ spojitá na } D \quad \Longrightarrow \quad \textsc{Existence}$$

$$\left.\begin{array}{c} f(t, y) \text{ spojitá na } D \\ + \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ omezená na } D \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \textsc{Existence a jednoznačnost}$$

Uvedeme si ještě jednu větu, ve které D nahradíme celou rovinou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Věta 3.3 *Nechť pravá strana rovnice (3.1) splňuje následující dvě podmínky:*

- *je spojitá funkce na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vzhledem k oběma proměnným t a y;*
- *má na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ spojitou a ohraničenou parciální derivaci $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.*

Potom Cauchyova úloha (3.3) má právě jedno řešení $y = y(t)$ definované na celém $\mathbb{R}$.

Příklad 3.4 ([1]) Ukážeme, že řešení rovnice

$$y' = t + \cos y$$

s počáteční podmínkou $y(t_0) = y_0$ je definované na celém intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení. Pravá strana je spojitá na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ v obou proměnných t a y a parciální derivace pravé strany vzhledem k y existuje a je ohraničená v celé rovině (t, y), protože

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |0 - \sin y| = |\sin y| \leq 1.$$

Tím jsou splněny předpoklady věty 3.3, a tak podle ní má úloha

$$\begin{cases} y' = t + \cos y, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

právě jedno řešení $y = y(t)$ definované pro $t \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$. □

Příklad 3.5 (Nejednoznačnost řešení) Pokusíme se aplikovat větu 3.3 na rovnici $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$.

Řešení. Ověření podmínek existence: Pravá strana rovnice,

$$f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{y^2},$$

je skutečně spojitá na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ověření podmínek jednoznačnosti: Parciální derivace pravé strany podle proměnné y,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}},$$

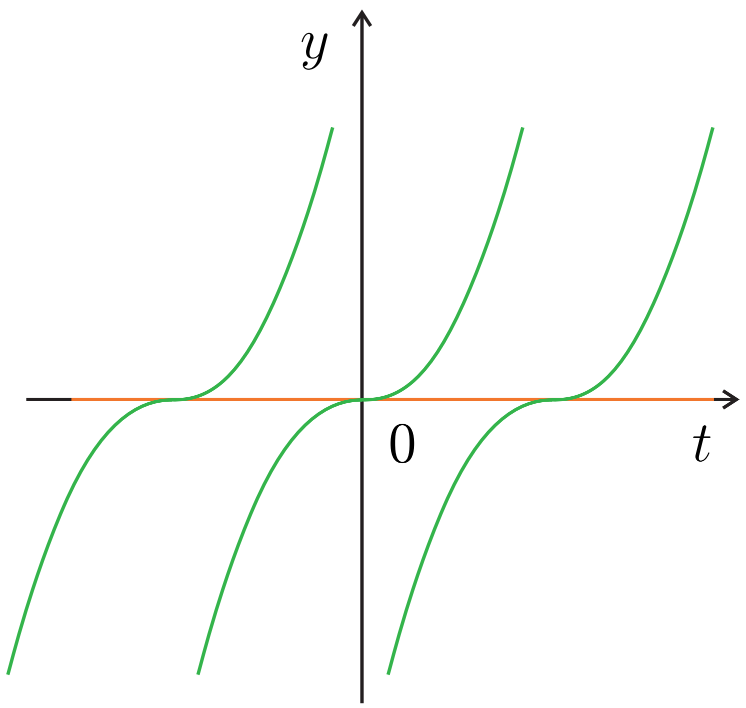
není omezená v okolí přímky $y = 0$ (na přímce $y = 0$ není definována vůbec). Tím nejsou splněny předpoklady věty 3.3, a tak ji nemůžeme použít. Na druhou stranu jde pouze o postačující podmínky existence a jednoznačnosti, a tak jejich nesplnění existenci a jednoznačnost nevylučuje.

Ve skutečnosti zde opravdu dochází k nejednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy s počáteční podmínkou $y(t_0) = 0$, neboť rovnice má jednak konstantní řešení $y \equiv 0$, jednak třídu řešení $y = (t - C)^3$ $C \in \mathbb{R}$. To znamená, že pro každou počáteční podmínku $y(t_0) = 0$ máme jednak řešení $y \equiv 0$, ale také řešení $y = (t - t_0)^3$. Obě řešení jsou definována na $J = (-\infty, \infty)$. (Neexistuje okolí bodu t_0, na kterém by si byla rovna, ani jedno není částí druhého.)

Řešení $y \equiv 0$ tedy vyhovuje definici singulárního řešení: každým bodem jeho grafu prochází alespoň jeden graf jiného řešení (téže rovnice).

Situace je ilustrována na obrázku 6.

Na druhou stranu stále můžeme aplikovat větu 3.2. D stačí volit tak, aby jej neprotínala přímka $y = 0$.



Obrázek 6: Grafické znázornění nejednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy z příkladu 3.5. Řešení $y \equiv 0$ je singulární.

$\square$

4 Vybrané elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

Po prostudování této kapitoly již budete umět rozeznat a vyřešit separovatelnou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu.

Konečně se vám dostane do ruky nástroj (postup) k aktivnímu vyřešení nějaké diferenciální rovnice.

Základní problémy při řešení diferenciálních rovnic

V dalších paragrafech této kapitoly uvedeme určité metody řešení *vybraných typů* diferenciálních rovnic, přičemž budeme vždy předpokládat, že řešení dané diferenciální rovnice existuje.

Chceme-li úspěšně řešit diferenciální rovnice, je třeba:

– poznat, jakého typu je zadaná rovnice,

– znát algoritmus řešení tohoto typu rovnic,

– správně zvládnout potřebné výpočetní operace.

4.1 Separace proměnných

Tuto metodu lze užít u tzv. separovatelných rovnic. Ty lze převést na tzv. separovanou rovnici

$$\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \psi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.1}$$

ve kterém jsou proměnné t a y separovány (odděleny), každá na své straně rovnice.

Je-li $y = u(t)$ nějaké řešení rovnice (4.1) na intervalu J, pak pro $t \in J$ je $\mathrm{d}y = u'(t)\,\mathrm{d}t$, takže platí $\varphi(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \psi(t)\,\mathrm{d}t$ a je to identická rovnost dvou diferenciálů na J, tj. $\mathrm{d}\Phi(u(t)) = \mathrm{d}\Psi(t)$, kde funkce Φ, Ψ jsou primitivní k funkcím φ, ψ (u nichž se zřejmě předpokládá například spojitost). Proto platí $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$. Znamená to, že funkce $u(t)$ jako řešení diferenciální rovnice (4.1) vyhovuje současně rovnici

$$\Phi(y) = \Psi(t) + C. \tag{4.2}$$

Toto tvrzení platí i naopak, tedy každá funkce $y = u(t)$, která vyhovuje rovnici (4.2), splňuje též rovnici (4.1), jak plyne z derivace identity $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$.

Závěr: Funkce $y = u(t)$ je řešením rovnice (4.1) právě tehdy, když vyhovuje rovnici (4.2); touto rovnicí lze tedy vyjádřit obecné řešení dané diferenciální rovnice (4.1).

Vraťme se nyní k naší rovnici (3.1), $y' = f(t, y)$. Kdy ona bude separovatelná? Zřejmě tehdy, když její pravá strana půjde vyjádřit jako součin, $f(t, y) = g(t)h(y)$:

$$y' = g(t)h(y). \tag{4.3}$$

Za předpokladu $h(y) \neq 0$ a při vědomí $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ můžeme (4.3) převést na separovanou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.4}$$

která se již řeší jako (4.1).

Zbývá vyšetřit podmínku $h(y) \neq 0$. Pokud má rovnice

$$h(y) = 0 \tag{4.5}$$

nějaké řešení $y = y_0 (\in \mathbb{R})$, potom je konstantní funkce $y \equiv y_0$ řešením (4.3), neboť po dosazení do (4.3) postupně dostáváme: $(y_0)' = h(y_0)g(t)$, $0 = 0g(t)$, $0 = 0$ (neboť derivace konstanty na levé straně rovnice je nula).

Za obecné řešení (4.3) budeme brát obecné řešení (4.4) doplněné o kořeny (4.5).

Vše si prakticky ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 4.1 Najdeme obecné řešení rovnice $y' = \dfrac{t(1-y)}{1+t}$.

Řešení. Ze zadání vyplývá, že řešení budeme hledat pro $t \neq -1$, neboť pro tuto hodnotu t není pravá strana definována.

Tato rovnice sice zatím není separovaná, ale je separovatelná, tj. lze v ní separovat proměnné. Vyjádříme-li y' jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, lze rovnici upravit na tvar, kde proměnné jsou již separované:

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t}, \tag{4.6}$$

přičemž použitá úprava vyžaduje předpoklad $y \neq 1$. Dále

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t}.$$

Po integraci máme

$$-\ln|1-y| = t - \ln|1+t| + C,$$

kde C je libovolná konstanta. V této chvíli je daná diferenciální rovnice již v podstatě vyřešena, všechno další jsou úpravy a kompletace řešení.

Předně, jsou-li v takto získané rovnici logaritmy, bývá vhodné i integrační konstantu vyjádřit jako logaritmus: $C = \ln C_1$, kde C_1 je libovolná *kladná* konstanta (zůstává zachováno, že C je *libovolná* konstanta). Rovnici

$$\ln|1+t| - \ln|1-y| = t + \ln C_1$$

odlogaritmujeme a máme

$$\left|\frac{1+t}{1-y}\right| = C_1 \mathrm{e}^t.$$

Položíme-li $C_2 = \frac{1}{C_1}$ ($C_2 > 0$ je pak také libovolná kladná konstanta), pak

$$\frac{1-y}{1+t} = \pm C_2 \mathrm{e}^{-t}$$

a z toho

$$\frac{1-y}{1+t} = C_3 \mathrm{e}^{-t},$$

kde $C_3 \neq 0$, tedy

$$\begin{aligned} 1-y &= C_3 \mathrm{e}^{-t}(1+t), \\ y &= 1 - C_3 \mathrm{e}^{-t}(1+t), \end{aligned}$$

což je obecné řešení (4.6) v explicitním tvaru.

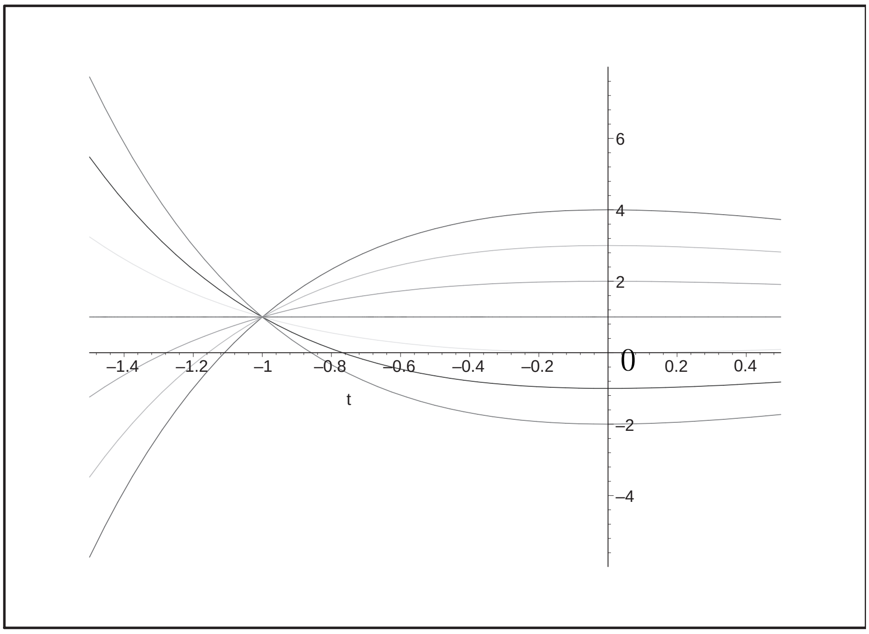
Nyní se vrátíme k podmínce ($y \neq 1$), kterou si vyžádala metoda řešení, a podíváme se, zda jsme tím nezanedbali nějaké řešení. Tedy ověříme, zda $y \equiv 1$, je řešením, tím, že tuto funkci dosadíme do levé a pravé strany dané diferenciální rovnice:

$$L = y' = 0, \qquad P = \frac{t(1-y)}{1+t} = 0.$$

Jelikož $L = P$ pro $t \neq -1$, funkce $y \equiv 1$, $t \neq -1$, je skutečně řešením. Toto řešení však nemusíme uvádět zvlášť, protože je dostaneme, když ve výše uvedeném obecném řešení připustíme nulovou hodnotu C. Konečný tvar obecného řešení je tedy

$$\left[y = 1 + C\mathrm{e}^{-t}(1+t), \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \neq -1 \right].$$

Situace je znázorněna na obrázku 7. Všimněte si zajímavého chování řešení v blízkosti bodu $(-1, 1)$. $\square$



Obrázek 7: Grafické znázornění několika řešení úlohy 4.1.

Příklad 4.2 Najdeme (obecné) řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{1-2t}{y^2}$.

Řešení. Ze zadání této separovatelné diferenciální rovnice plyne, že neznámá funkce y se nikdy nesmí rovnat nule,

$$y \neq 0,$$

neboť se vyskytuje ve jmenovateli. Tato skutečnost nám umožňuje vynásobit celou rovnici y^2 a po přepsání derivace na podíl diferenciálů dostáváme (zde bez dodatečných podmínek):

$$y^2 y' = 1 - 2t.$$

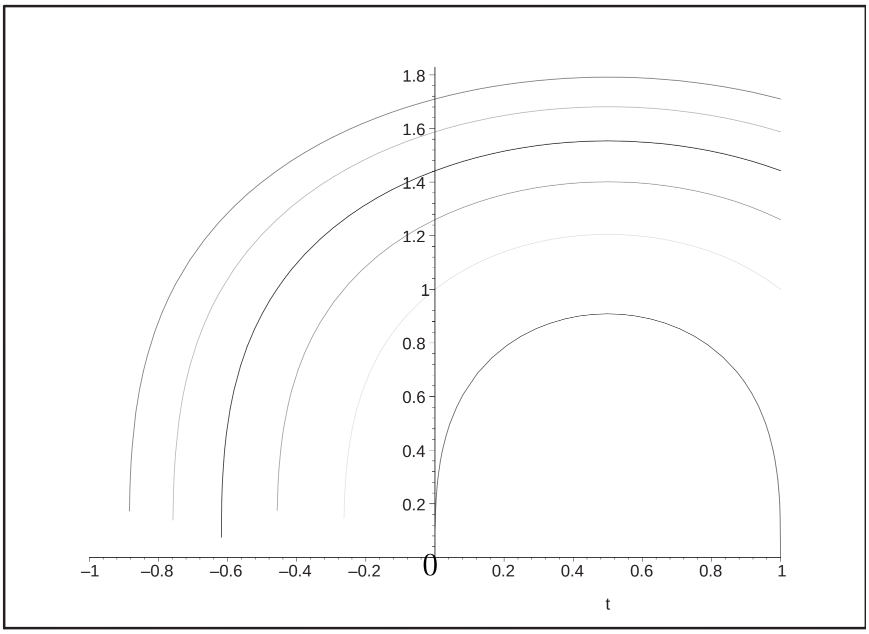
Pokračujeme v úpravách a výpočtech:

$$\begin{aligned}
y^2 \,\mathrm{d}y &= (1-2t)\,\mathrm{d}t, \\
\int y^2 \,\mathrm{d}y &= \int (1-2t)\,\mathrm{d}t, \\
\frac{1}{3} y^3 &= t - t^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
y^3 &= 3t - 3t^2 + C_2, \quad C_2 = 3C_1 \Rightarrow C_2 \in \mathbb{R}, \\
y &= \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C_2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Obecné řešení dané rovnice je

$$\left[y = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0 \right].$$

Na obrázku 8 je poněkud nedokonale znázorněno několik kladných řešení. $\square$



Obrázek 8: Grafické znázornění několika řešení úlohy 4.2.

Příklad 4.3 Pomocí separace proměnných vyřešte následující diferenciální rovnice:

1. $y' = \dfrac{y}{x}, \quad [y = Cx,\ C \in \mathbb{R},\ x \neq 0],$
2. $y' = \dfrac{x}{y}, \quad \left[y = \pm\sqrt{x^2 + C},\ C \in \mathbb{R},\ y \neq 0,\ x \geq -C\right],$
3. $y' = -\dfrac{y}{x}, \quad \left[y = \frac{C}{x},\ C \in \mathbb{R},\ x \neq 0\right],$
4. $y' = -\dfrac{x}{y}, \quad [y^2 + x^2 = C,\ C \geq 0,\ y \neq 0],$
5. $y' = \dfrac{y - 1}{x^2 y^2}, \quad \left[\begin{array}{l} \frac{y^2}{2} + y + \ln(y - 1) = -\frac{1}{x} + C,\ C \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ y \neq 0, \\ y \equiv 1 \end{array}\right].$

4.2 Užití substitucí

Po prostudování této kapitoly budete schopni rozpoznat některé typy diferenciálních rovnic prvního řádu, které lze vhodnou substitucí převést na separovatelné DR.

Možnost použití substitucí nám znatelně rozšíří škálu řešitelných diferenciálních rovnic.

U některých typů diferenciálních rovnic lze pomocí vhodných substitucí (transformace neznámé funkce, případně i transformace nezávisle proměnné) převést tyto rovnice na separovatelné.

4.2.1 Rovnice typu $y' = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$

Zde budeme řešit rovnice typu

$$y' = f(\alpha t + \beta y + \gamma),$$

kde oba koeficienty α a β jsou nenulové ($\alpha\beta \neq 0$), neboť v opačném případě by šlo o separovatelnou rovnici (na pravé straně by chybělo t nebo y, nebo obojí).

Užijeme substituci

$$z = \alpha t + \beta y + \gamma,$$

odkud

$$z' = \alpha + \beta y', \quad \text{tj.} \quad y' = \frac{1}{\beta}(z' - \alpha).$$

Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z' = \alpha + \beta f(z),$$

v níž lze separovat proměnné.

Poznámka 4.1 Jelikož při vlastní separaci proměnných příslušnou rovnici dělíme výrazem $\alpha + \beta f(z)$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a ověřit, zda jsme tím nepřišli o nějaké řešení (to je potřeba do výsledného řešení zvlášť doplnit).

Nakonec se nesmíme zapomenout vrátit k původní proměnné y.

Příklady takových diferenciálních rovnic

- $y' = t + y$, subst. $z = t + y$;
- $y' = (t + y + 5)^3$, subst. $z = t + y + 5$;
- $y' = \cos(2y + 5t - 1)$, subst. $z = 2y + 5t - 1$;
- $y' = \dfrac{2t + 6y - 2}{\sin(t + 3y - 1)}$, subst. $z = t + 3y - 1$.

Příklad 4.4 Vyřešíme rovnici $y' = t + y$.

Řešení. Zde máme $y' = f(1 \cdot t + 1 \cdot y + 0)$, kde funkce f je identita ($f(x) \equiv x$). Volíme tedy substituci $z = t + y$, odkud $z' = 1 + y'$, tedy $y' = z' - 1$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostáváme $z' - 1 = z$, neboli

$$z' = z + 1.$$

Dělením této rovnice výrazem $z + 1$, kde $z \neq -1$, a násobením $\mathrm{d}t$ provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}z}{z + 1} = \mathrm{d}t,$$

z níž po integraci a úpravách dostáváme

$$z + 1 = C_1 \mathrm{e}^t,$$

neboli

$$y = C_1 \mathrm{e}^t - 1 - t,$$

kde $C_1 \neq 0$ je libovolná konstanta. Rovnost $z = -1$ dává $y = -1 - t$, a to je funkce, která (jak zjistíme dosazením do dané diferenciální rovnice) je rovněž řešením.

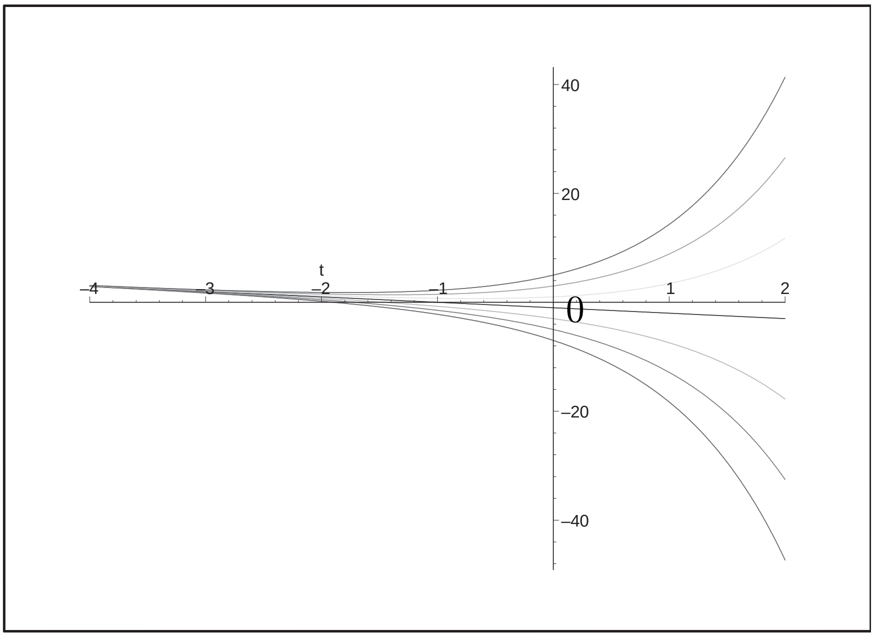
Můžeme je elegantně zahrnout do obecného řešení povolením nulové hodnoty parametru C_1 ($y = 0 \cdot \mathrm{e}^t - 1 - t = -1 - t$). Obecné řešení je tedy

$$\Big[y = C\mathrm{e}^t - 1 - t, \quad C \in \mathbb{R} \Big].$$

Několik těchto řešení je znázorněno na obrázku 9. □

Příklad 4.5 Nalezneme (obecné) řešení diferenciální rovnice $y' = (4y - t)^2$.

Řešení. Na pravé straně rovnice nacházíme lineární výraz, tak použijeme substituci $z = 4y - t$ (funkce f je zde druhá mocnina).



Obrázek 9: Grafické znázornění několika řešení z příkladu 4.4.

Ze substituční rovnice si ještě vyjádříme y': $z' = 4y' - 1$, $y' = \frac{z'+1}{4}$. Dosadíme a řešíme separací proměnných:

$$
\begin{aligned}
y' &= (4y - t)^2, \\
\frac{z' + 1}{4} &= z^2, \\
z' &= 4z^2 - 1 \mid \cdot \, \mathrm{d}t, : (4z^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow z \neq \pm\frac{1}{2}, \quad (4.7) \\
\frac{\mathrm{d}z}{4z^2 - 1} &= \mathrm{d}t, \\
\int \frac{\mathrm{d}z}{4z^2 - 1} &= \int \mathrm{d}t, \qquad (4.8) \\
-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{2z + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{2z - 1} &= \int \mathrm{d}t, \\
-\frac{1}{4}\ln|2z+1| + \frac{1}{4}\ln|2z-1| &= t + \ln C_1, \quad C_1 > 0, \\
\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2z - 1}{2z + 1}\right| &= t + \ln C_1, \quad C_1 > 0,
\end{aligned}
$$

$$\ln \left| \frac{2z-1}{2z+1} \right| = 4t + \ln C_2, \quad C_2 > 0,$$

$$\left| \frac{2z-1}{2z+1} \right| = C_2 \mathrm{e}^{4t}, \quad C_2 > 0,$$

$$\frac{2z-1}{2z+1} = C_3 \mathrm{e}^{4t}, \quad C_3 = \pm C_2 \Rightarrow C_3 \neq 0. \tag{4.9}$$

Na levé straně (4.8) integrujeme racionální funkci metodou rozkladu na parciální zlomky. Na řádku (4.7) jsme pro další úpravy vyloučili možnosti $z = \pm\frac{1}{2}$. Nyní musíme prozkoumat, zda jsme tím nepřišli o nějaké řešení. Otestujeme dvě konstantní funkce $z_1(t) \equiv -\dfrac{1}{2}$ a $z_2(t) \equiv \dfrac{1}{2}$:

$z_1: \quad L = \left(-\frac{1}{2}\right)' = 0,\ P = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4\frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0,\ L = P.$

$z_2: \quad L = \left(\frac{1}{2}\right)' = 0,\ P = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4\frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0,\ L = P.$

Máme tedy dvě dodatečná (konstantní) řešení. Jedno z nich, z_2, můžeme zakomponovat do (4.9), když u parametru C_3 povolíme nulu, z_1 musíme zapsat zvlášť. Celkově tedy máme:

$$\left[\frac{2z-1}{2z+1} = C\mathrm{e}^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad z \equiv -\frac{1}{2} \right].$$

Po návratu k původní proměnné y dostaneme:

$$\left[\frac{8y-2t-1}{8y-2t+1} = C\mathrm{e}^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y = \frac{2t-1}{8} \right].$$

Na obrázku 10 je znázorněno několik těchto řešení. □

4.2.2 Rovnice typu $y' = F\left(\frac{y}{t}\right)$, tzv. homogenní rovnice

Budeme řešit rovnice typu

$$y' = F\left(\frac{y}{t}\right), \qquad t \neq 0.$$

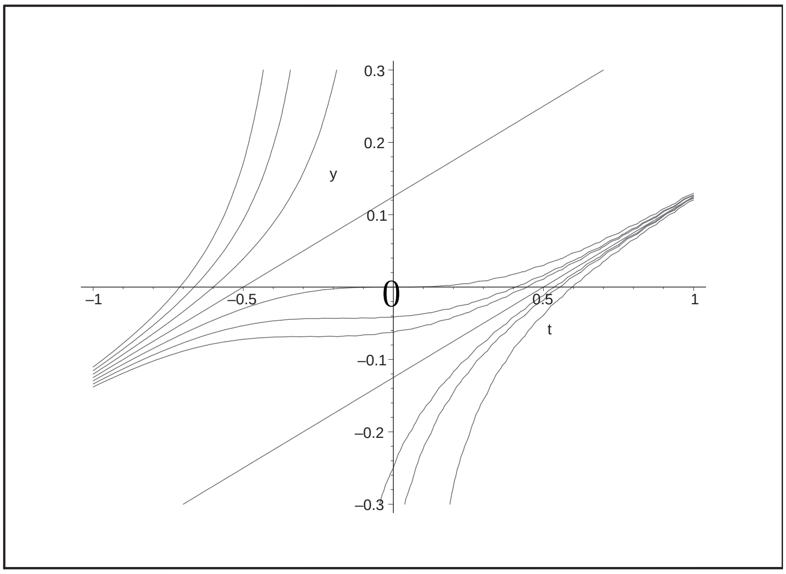
V tomto případě užijeme substituci

$$z = \frac{y}{t}, \quad \text{odkud} \quad y = zt, \quad \text{a tedy} \quad y' = z + tz'.$$

Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z't = F(z) - z,$$

v níž lze separovat proměnné. Jelikož přitom tuto rovnici dělíme výrazem $F(z) - z$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec opět ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se pak vracíme k původní proměnné.



Obrázek 10: Grafické znázornění několika řešení z příkladu 4.5. Horní přímku dostaneme pro $C = 0$ ($8y - 2t - 1 = 0$, tedy $y = \frac{2t+1}{8}$), dolní přímka pak odpovídá zvlášť zapsanému řešení $y = \frac{2t-1}{8}$.

Příklady takových diferenciálních rovnic

- $y' = \dfrac{2t^5 - 3y^1t^4}{-t^3y^2 + y^4t^1} \cdot \dfrac{\frac{1}{t^5}}{\frac{1}{t^5}}, \quad y' = \dfrac{2 - 3\left(\frac{y}{t}\right)}{-\left(\frac{y}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^4}, \quad \text{subst.: } z = \dfrac{y}{t};$

- $2tyy' = y^2 - t^2, \quad y' = \dfrac{y^2 - t^2}{2ty} \cdot \dfrac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}, \quad y' = \dfrac{\left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{t}\right)}, \quad \text{subst.: } z = \dfrac{y}{t};$

- $y^2 + (t^2 - ty)y' = 0, \quad y' = \dfrac{-y^2}{t^2 - ty} \cdot \dfrac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}, \quad y' = \dfrac{-\left(\frac{y}{t}\right)^2}{1 - \left(\frac{y}{t}\right)}, \quad \text{subst.: } z = \dfrac{y}{t}.$

Příklad 4.6 Řešíme rovnici $y' = \dfrac{y^2 - t^2}{2ty}$.

Řešení. Ze zadání plyne, že y a t jsou různé od nuly:

$$y \neq 0, \qquad t \neq 0.$$

Po dělení čitatele i jmenovatele výrazem t^2 dostaneme uvedený tvar rovnice, tedy

$$y' = \frac{\left(\dfrac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\left(\dfrac{y}{t}\right)}.$$

Nyní zvolíme novou neznámou funkci vztahem

$$z = \frac{y}{t}, \quad \text{odkud} \quad y = zt, \quad \text{a tedy} \quad y' = z + tz'.$$

Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostaneme

$$z + tz' = \frac{z^2 - 1}{2z}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{2z\,\mathrm{d}z}{z^2 + 1} = -\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Po integrování a úpravách dostaneme integrál dané diferenciální rovnice ve tvaru

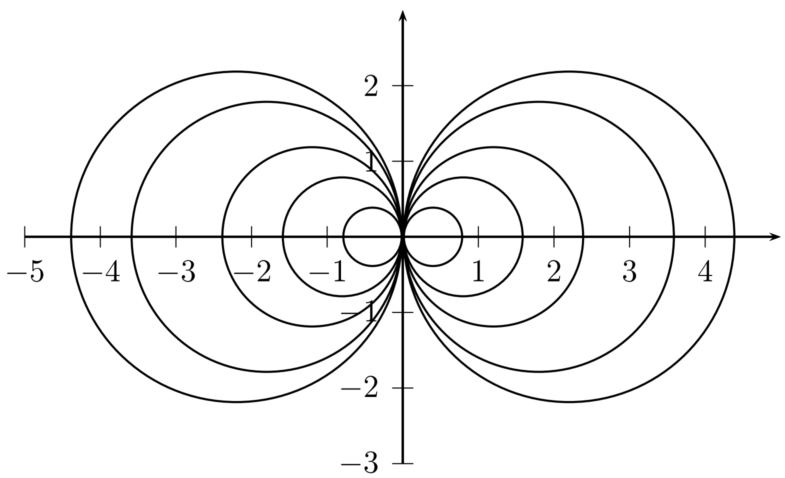
$$(t - C)^2 + y^2 = C^2, \quad C \in \mathbb{R},$$

což představuje jednoparametrickou soustavu kružnic se středy v $[C, 0]$ a s poloměry $|C|$.

Při původních (definičních) podmínkách $y \neq 0$ a $t \neq 0$ dostáváme soustavu půlkružnic

$$\Big[(t - C)^2 + y^2 = C^2, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0, \quad t \neq 0\Big].$$

Situace je znázorněna na obrázku 11. □



Obrázek 11: Grafické znázornění řešení z příkladu 4.6 — jednoparametrická soustava půlkružnic se středy v $[C, 0]$ a s poloměry $|C|$, daná rovnicí $(t-C)^2+y^2 = C^2$ a podmínkami $y \neq 0$ a $t \neq 0$.

4.2.3 Rovnice typu $y' = f\left(\dfrac{\alpha_1 t + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 t + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$

Ve zvláštním případě, pokud determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

nebo

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0, \quad (\text{tedy vlastně} \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0),$$

lze rovnici řešit separací proměnných s případnou předchozí substitucí pro rovnici homogenní.

Je-li $\Delta \neq 0$ a též $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, provedeme substituci, při níž transformujeme jak neznámou funkci y, tak nezávisle proměnnou t:

$$y = z + r,$$
$$t = \tau + s.$$

Po dosazení na pravé straně dostáváme:

$$f\left(\frac{\alpha_1(\tau + s) + \beta_1(z + r) + \gamma_1}{\alpha_2(\tau + s) + \beta_2(z + r) + \gamma_2}\right) = f\left(\frac{\alpha_1 \tau + \beta_1 z + (\alpha_1 s + \beta_1 r + \gamma_1)}{\alpha_2 \tau + \beta_2 z + (\alpha_2 s + \beta_2 r + \gamma_2)}\right).$$

Koeficienty r a s volíme tak, abychom pro neznámou funkci $z = z(\tau)$ dostali rovnici homogenní, tj. aby se vynulovaly absolutní členy v čitateli i ve jmenovateli uvedeného zlomku, tedy pokud položíme

$$\begin{aligned} \alpha_1 s + \beta_1 r + \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 s + \beta_2 r + \gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Determinant matice této soustavy je právě Δ, z jeho nenulovosti plyne existence právě jednoho řešení (r, s) uvedené soustavy.

Z transformačních rovnic dále plyne, že

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau \quad (\text{tedy} \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}),$$

a tak daná rovnice přejde na tvar rovnice homogenní:

$$z' = f\left(\frac{\alpha_1 \tau + \beta_1 z}{\alpha_2 \tau + \beta_2 z}\right).$$

Příklad 4.7 Řešíme rovnici $y' = \dfrac{5t - 2y - 1}{2t - y + 1}$.

Řešení. Nejprve řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 5s - 2r - 1 &= 0, \\ 2s - r + 1 &= 0, \end{aligned}$$

jejíž determinant soustavy je $\Delta = -1 \neq 0$; je $r = 7$, $s = 3$. Substituce $y = z + 7$, $t = \tau + 3$ transformuje rovnici na tvar

$$z' = \frac{5\tau - 2z}{2\tau - z} \qquad \text{neboli} \qquad z' = \frac{5 - 2\frac{z}{\tau}}{2 - \frac{z}{\tau}}$$

rovnice homogenní. Položíme nyní $\dfrac{z}{\tau} = u(\tau)$, tj. $z = u\tau$. Z toho $z' = u + u'\tau$, takže

$$u + u'\tau = \frac{5 - 2u}{2 - u}, \qquad \text{odkud} \qquad u'\tau = \frac{u^2 - 4u + 5}{2 - u}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{2 - u}{u^2 - 4u + 5}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau},$$

nebo též

$$\frac{2u - 4}{u^2 - 4u + 5}\mathrm{d}u = -2\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}.$$

Po integraci získáme

$$\ln(u^2 - 4u + 5) = -2\ln|\tau| + \ln C_1, \quad \text{kde} \quad C_1 \neq 0,$$

tedy

$$u^2 - 4u + 5 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Jelikož $u = \dfrac{z}{\tau}$, $z = y - 7$, $\tau = t - 3$, je $u = \dfrac{y - 7}{t - 3}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice lze vyjádřit (implicitně):

$$\left(\frac{y - 7}{t - 3}\right)^2 - 4\frac{y - 7}{t - 3} + 5 = \frac{C}{(t - 3)^2}, \quad \text{kde} \quad C \neq 0.$$

□

4.2.4 Snížení řádu diferenciální rovnice

Pokud v diferenciální rovnici n-tého řádu chybí členy s y, y',..., $y^{(n-2)}$, lze ji substitucí $z = y^{(n-1)}$ převést na diferenciální rovnici 1. řádu.

Příklad 4.8 Řešíme diferenciální rovnici $y'' = \dfrac{y'}{x}$.

Řešení. Substituce:

$$z = y', \quad z' = y'' \quad z' = \frac{z}{x}.$$

Separace proměnných ($z \equiv 0$ je řešením):

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \ln|z| = \ln|x|, \quad z = Cx,\ C \in \mathbb{R}.$$

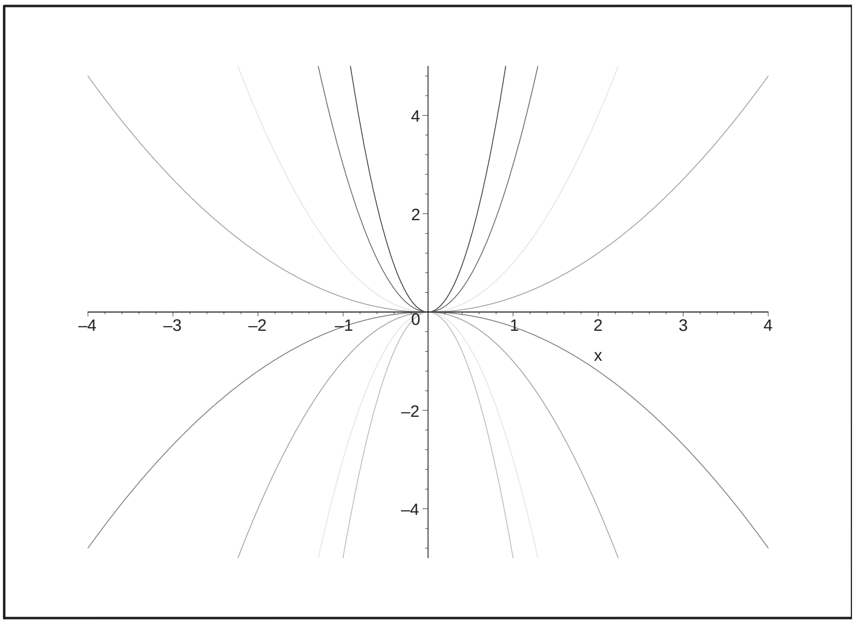
Zpětná substituce:

$$y' = Cx, \quad y = \frac{C}{2}x^2 + C_1,\ C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Řešení ($C_2 = \frac{C}{2}$):

$$y = C_1 + C_2 x^2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Několik řešení je znázorněno na obrázku 12. □



Obrázek 12: Grafické znázornění několika řešení z příkladu 4.8 pro $C_1 = 0$.

Poznámka 4.2 Vidíme, že obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu v příkladu 4.8 závisí na dvou integračních konstantách.

Příklad 4.9 Řešíme počáteční úlohu:

$$\begin{cases} y''' = \mathrm{e}^{2x}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

Řešení. Substituce:

$$z = y'', \quad z' = y''', \quad z' = \mathrm{e}^{2x}, \quad z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_4,\ C_4 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substituce:

$$y'' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_4.$$

Substituce:

$$z = y', \quad z' = y'', \quad z' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_4, \quad z = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + C_4 x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substituce:

$$y' = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + C_4 x + C_2, \quad y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + \frac{C_4}{2}x^2 + C_2 x + C_3,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení ($C_1 = \frac{C_4}{2}$):

$$y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Počáteční podmínky:

$$y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad y' = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + 2C_1 x + C_2, \quad y'' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2C_1.$$

$$\begin{array}{r|r|l} y(0) = 1 & \frac{1}{8}\mathrm{e}^0 + C_1 0 + C_2 0 + C_3 = 1 & \frac{1}{8} + C_3 = 1 \\ y'(0) = -1 & \frac{1}{4}\mathrm{e}^0 + 2C_1 0 + C_2 = -1 & \frac{1}{4} + C_2 = -1 \\ y''(0) = 0 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 + 2C_1 = 0 & \frac{1}{2} + 2C_1 = 0 \end{array}$$

Tudíž:

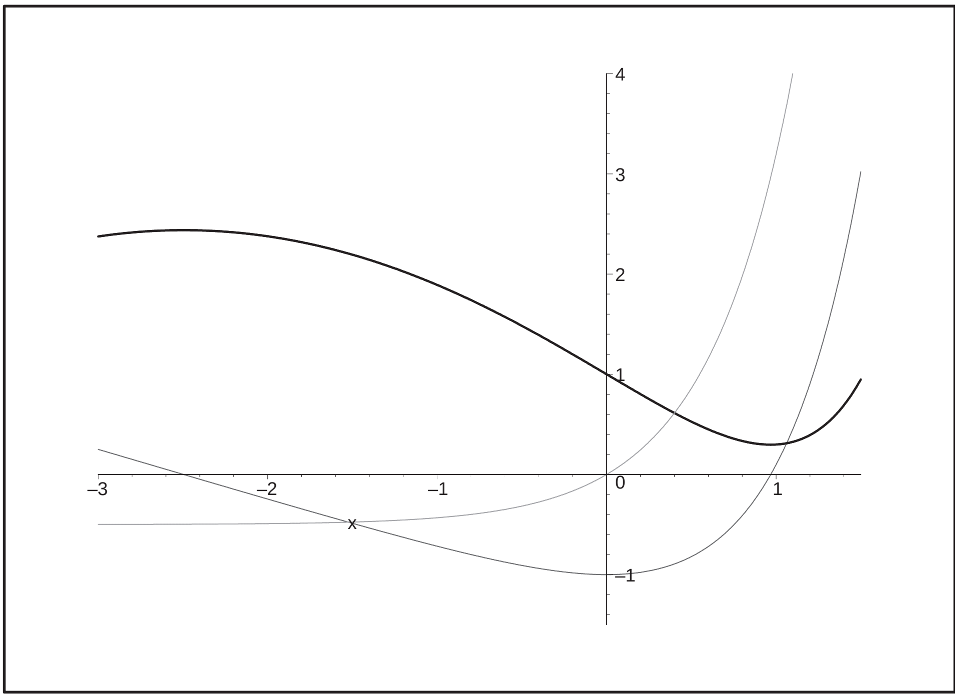
$$C_1 = -\frac{1}{4}, \quad C_2 = -\frac{5}{4}, \quad C_3 = \frac{7}{8}.$$

Partikulární řešení:

$$y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}.$$

Toto řešení, společně s jeho první a druhou derivací, je znázorněno na obrázku 13.

□



Obrázek 13: Grafické znázornění partikulárního řešení (nejvýraznější křivka) z příkladu 4.9, včetně jeho první a druhé derivace ($y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$).

Příklad 4.10 Najděte obecné řešení homogenní diferenciální rovnice:

$(t + y)\,\mathrm{d}t - (t - y)\,\mathrm{d}y = 0.$ $\qquad \left[\operatorname{arctg} \dfrac{y}{t} = \ln \sqrt{t^2 + y^2} + C\right]$

Příklad 4.11 Najděte obecné řešení homogenní diferenciální rovnice:

$(t^2 + ty + y^2)\,\mathrm{d}t = t^2\,\mathrm{d}y.$ $\qquad [y = t \operatorname{tg}(\ln Ct)]$

Příklad 4.12 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

a) $y''' = y''^3$, $\qquad \left[3y = (C_1 - 2t)^{\frac{3}{2}} + C_2 t + C_3\right]$

b) $ay''' = y''$, kde $a > 0$. $\qquad \left[y = C_1 \mathrm{e}^{\frac{t}{a}} + C_2 t + C_3\right]$

5 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu (LDR$_{1.ř}$)

Po prostudování této kapitoly budete schopni rozpoznat a vyřešit LDR$_{1.ř}$ metodou variace konstanty.

Výhodou LDR$_{1.ř}$ je jejich jednoduchý tvar a přímočaré řešení.

Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu nazýváme rovnici tvaru

$$y' + p(t)y = f(t). \tag{5.1}$$

Funkce $f(t)$ se nazývá *pravá strana*. Pokud pravá strana není identicky rovna nule, máme *nehomogenní* LDR$_{1.ř}$ (NHLDR$_{1.ř}$), v opačném případě máme rovnici *homogenní* (HLDR$_{1.ř}$):

$$y' + p(t)y = 0 \tag{5.2}$$

Budeme předpokládat, že p a f jsou spojité funkce na nějakém intervalu I. Jak je to potom s existencí řešení počáteční úlohy?

Věta 5.1 (O globálnosti řešení LDR$_{1.ř}$, [1])
Jestliže jsou funkce p a f spojité na intervalu I, potom úloha

$$\begin{cases} y' + p(t)y = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

kde $t_0 \in I$ a y_0 je libovolné reálné číslo, má jediné řešení $y = y(t)$ na celém intervalu I.

LDR$_{1.ř}$ jsou velmi důležité. Jednak na ně vede řada významných praktických problémů (chemické reakce, množení bakterií, radioaktivní rozpad, ochlazování těles, ...) a jednak lze některé jiné typy rovnic řešit tak, že je transformujeme na LDR$_{1.ř}$.

Existuje několik metod, jak řešit LDR$_{1.ř}$; lze je například řešit i vzorcem.[4] Nejznámější je *metoda variace konstanty*.

[4]Prakticky se dává přednost použití některé z aktivních metod, sloužících jinak i k odvození onoho vzorce.

Metoda variace konstanty

Tato metoda spočívá ve třech krocích:

1. Nejprve řešíme (separací proměnných) příslušnou rovnici homogenní a obecné řešení zapíšeme s integrační konstantou K.

2. Řešení nehomogenní rovnice hledáme v tomtéž tvaru, kde však $K = K(t)$ je funkce (odsud i název metody: z konstanty „se stane“ funkce). Dosadíme tedy funkci vypočtenou v bodě 1 do dané nehomogenní rovnice a dostaneme rovnici pro neznámou funkci K'.

3. Integrací vypočteme $K(t)$ (s integrační konstantou C) a dosadíme je do funkce vypočtené v kroku 1.

Postup při řešení $\mathrm{LDR}_{1.\check{r}}$ metodou variance konstanty si ukážeme na příkladu.

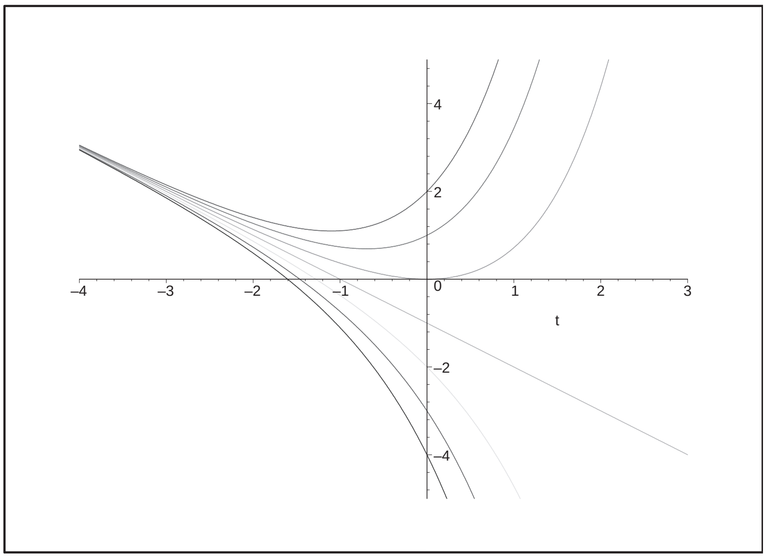
Příklad 5.1 Určíme obecné řešení diferenciální rovnice $y' = t + y$.

Řešení. Danou rovnici lze přepsat do standardního tvaru $y' - y = t$, máme tedy $p(t) \equiv -1$ a $f(t) = t$. Podle návodu řešíme ve třech krocích:

1. Metodou separace proměnných vyřešíme příslušnou homogenní rovnici $y' - y = 0$. Její obecné řešení je
$$y = C \cdot \mathrm{e}^t, \ C \in \mathbb{R}.$$

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že C nahradíme funkcí $K = K(t)$. Po dosazení máme
$$K' \cdot \mathrm{e}^t + K \cdot \mathrm{e}^t - K \cdot \mathrm{e}^t = t;$$
dva členy s K se ruší (a to vždy!) a máme
$$K' = t \cdot \mathrm{e}^{-t}.$$

3. Integrujeme:
$$K = \int t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [\text{metoda per partes}] = C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}.$$
Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^t$ a dostáváme
$$y = (C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}) \cdot \mathrm{e}^t.$$
Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy
$$\Big[y = C \cdot \mathrm{e}^t - t - 1, \quad C \in \mathbb{R}\Big].$$



Obrázek 14: Grafické znázornění několika řešení z příkladu 5.1.

□

Poznámka 5.1 Vidíme, že obecné řešení nehomogenní rovnice je rovno součtu obecného řešení příslušné rovnice homogenní ($C \cdot \mathrm{e}^t$) a partikulárního řešení dané rovnice nehomogenní ($-t-1$). Tento poznatek platí pro lineární rovnice obecně.

Příklad 5.2 Určíme obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y\cos t = \sin 2t$.

Řešení. Pravá strana je $\sin 2t$, příslušná rovnice homogenní je $y' + y\cos t = 0$.

1. Separací proměnných dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že C nahradíme funkcí $K = K(t)$. Po dosazení máme

$$K' \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} + K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}(-\cos t) + K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}\cos t = \sin 2t;$$

   dva členy s K se ruší (jako vždy) a máme $\quad K' = \mathrm{e}^{\sin t}\sin 2t.$

3. Integrujeme:

$$K = \int \mathrm{e}^{\sin t}\sin 2t\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^{\sin t} 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{ll} u = 2\sin t & v' = \mathrm{e}^{\sin t}\cos t \\ u' = 2\cos t & v = \mathrm{e}^{\sin t} \end{array}\right]$$

$$= 2\mathrm{e}^{\sin t}\sin t - \int 2\mathrm{e}^{\sin t}\cos t\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^{\sin t}\sin t - 2\mathrm{e}^{\sin t} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

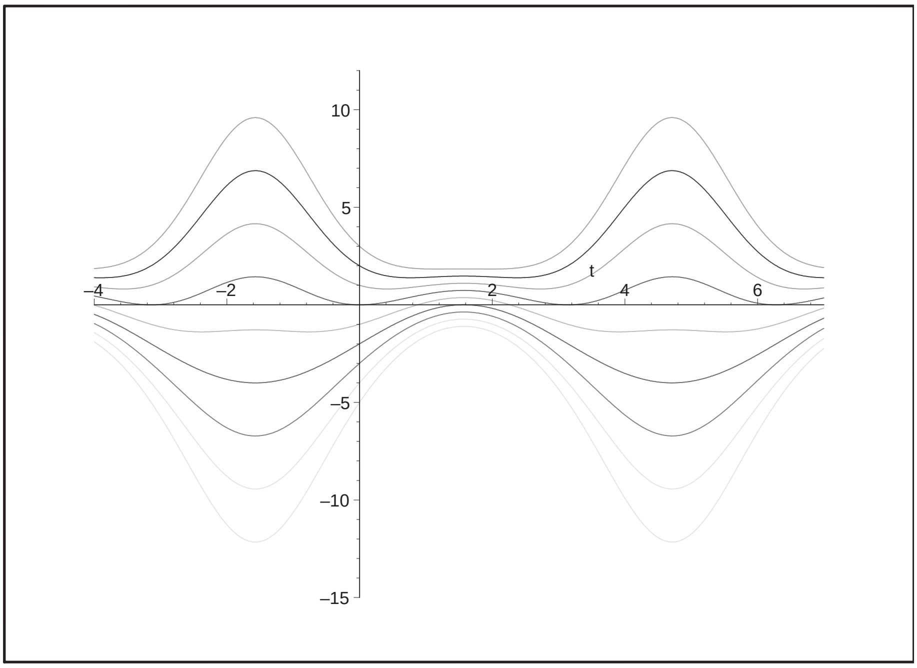
Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}$ a dostáváme

$$y = (2\mathrm{e}^{\sin t} \sin t - 2\mathrm{e}^{\sin t} + C) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$\left[y = 2(\sin t - 1) + C \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}, \quad C \in \mathbb{R}\right].$$

$\square$



Obrázek 15: Grafické znázornění několika řešení z příkladu 5.2.

Příklad 5.3 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$y' + 2ty = 2t\mathrm{e}^{-t^2}$. $\quad \left[y = C\mathrm{e}^{-t^2} + t^2\mathrm{e}^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}\right]$

Příklad 5.4 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$y' + 2y = t^2 + 2t$. $\quad \left[y = C\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{1}{4}(2t^2 + 2t - 1), \quad C \in \mathbb{R}\right]$

6 Lineární diferenciální rovnice 2. řádu ($\mathrm{LDR}_{2.ř}$)

Po prostudování této kapitoly budete schopni rozpoznat $\mathrm{LDR}_{2.ř}$ a budete se orientovat v problematice řešeni (zejména homogenní úlohy).

Uvidíte, že lineární nezávislost je vlastností nejen vektorů, ale i funkcí.

Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu nazýváme rovnici tvaru

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \tag{6.1}$$

kde p, q a f jsou funkce definované na jistém intervalu J; p a q se nazývají koeficienty této diferenciální rovnice.

Rovnice (6.1) se nazývá homogenní (s nulovou pravou stranou), je-li $f(t) \equiv 0$:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{6.2}$$

Budeme ji označovat $\mathrm{HLDR}_{2.ř}$.

V případě (6.1) hovoříme o nehomogenní rovnici (s nenulovou pravou stranou). Budeme ji označovat $\mathrm{NHLDR}_{2.ř}$.

Ukázka 6.1 a) $y'' = -y', \quad y'' + y' = 0$ $\qquad \mathrm{HLDR}_{2.ř}$

b) $y'' + t^2y + 1 = 0, \quad y'' + t^2y = -1$ $\qquad \mathrm{NHLDR}_{2.ř}$

□

Budeme předpokládat, že p, q a f jsou spojité funkce na intervalu J. Jak je to potom s existencí řešení počáteční úlohy? A jak vlastně počáteční podmínky v tomto případě vypadají?

Věta 6.1 (O globálnosti řešení $\mathrm{LDR}_{2.ř}$, [1]) *Jestliže jsou funkce p, q a f spojité na intervalu J, potom úloha*

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \end{cases} \tag{6.3}$$

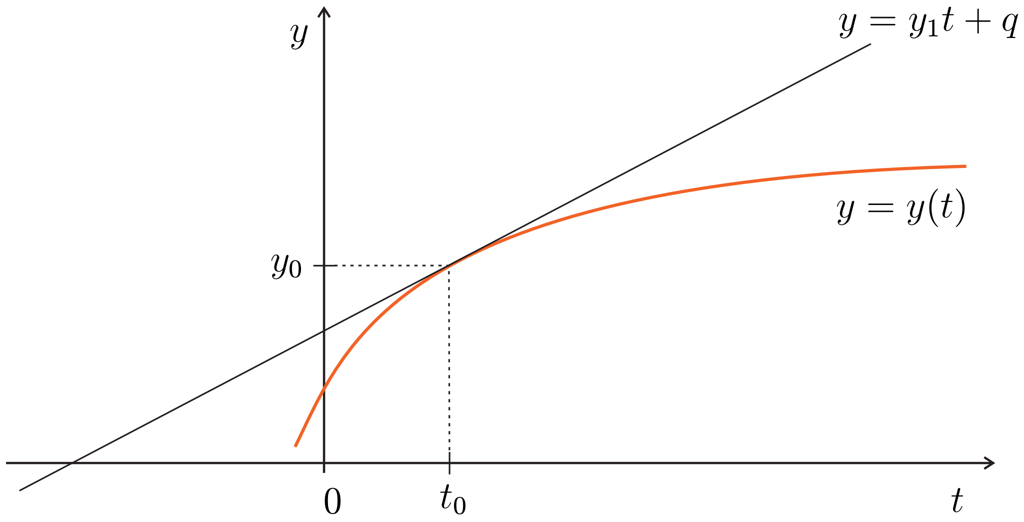
kde $t_0 \in J$ a y_0 s y_1 jsou dvě libovolná reálná čísla, má jediné řešení $y = y(t)$ na celém intervalu J.

Poznámka 6.1 Chceme-li pomocí lineárních diferenciálních rovnic formulovat úlohu, která má právě jedno řešení, musíme předepsat tolik počátečních podmínek, jaký je řád rovnice.

Je-li podmínek méně, má úloha nekonečně mnoho řešení, je-li jich více, nemusí mít žádné.

Geometrická interpretace počáteční úlohy (6.3)

Hledáme takové řešení dané rovnice, které v bodě t_0 nabývá hodnoty y_0 a jehož derivace v bodě t_0 nabývá hodnoty y_1.



Obrázek 16: Grafické znázornění řešení počáteční úlohy (6.3).

6.1 Linearita rovnic

Budeme uvažovat operátor[5] L, který je dán následujícím předpisem:

$$L(y) := y'' + p(t)y' + q(t)y, \tag{6.4}$$

kde funkce y mají spojitou druhou derivací[6] na intervalu J (takovou množinu funkcí značíme $C^2(J)$). Zřejmě $L(y)$ je zase funkce se stejnou vlastností, tedy z $C^2(J)$.

S pomocí tohoto operátoru můžeme HLDR$_{2.ř}$ (6.2) zapsat vztahem

$$L(y) = 0.$$

Podobně NHLDR$_{2.ř}$ (6.1) můžeme přepsat na

$$L(y) = f(t).$$

Ukážeme si, že L je *aditivní* a *homogenní*. Operátoru s těmito dvěma vlastnostmi se říká *lineární*, což je pro nás zásadní pojem.

[5]To je zobrazení, které každé funkci z dané množiny přiřaďuje zase funkci.
[6]To ovšem znamená, že je na J spojitá i první derivace a samotná funkce.

- *Aditivnost* zde znamená, že pro libovolné funkce $y_1, y_2 \in C^2(J)$ platí:
$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$
Pojďme si to ukázat:
$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= (y_1 + y_2)'' + p(t)(y_1 + y_2)' + q(t)(y_1 + y_2) \\ &= (y_1'' + y_2'') + p(t)(y_1' + y_2') + q(t)(y_1 + y_2) \\ &= \big(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1\big) + \big(y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2\big) \\ &= L(y_1) + L(y_2). \end{aligned}$$

- *Homogennost* zde znamená, že pro libovolnou funkci $y \in C^2(J)$ a libovolnou konstantu $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:
$$L(\alpha y) = \alpha L(y).$$
Pojďme si to ukázat:
$$\begin{aligned} L(\alpha y) &= (\alpha y)'' + p(t)(\alpha y)' + q(t)(\alpha y) \\ &= \alpha y'' + p(t)\alpha y' + q(t)\alpha y \\ &= \alpha\big(y'' + p(t)y' + q(t)y\big) \\ &= \alpha L(y). \end{aligned}$$

Operátor L je tedy lineárním operátorem. Odtud je odvozen i název studovaných rovnic — *lineární rovnice.*

6.2 Vlastnosti homogenních rovnic ($\mathbf{HLDR_{2.ř}}$)

Věta 6.2 *Buďte $y_1(t)$ a $y_2(t)$ dvě řešení rovnice (6.2) na J. Pak funkce*
$$y = y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t),$$
kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty z $\mathbb{R}$, je také řešením rovnice (6.2).

Důkaz. Funkci $y(t)$ dosadíme do (6.2). S operátorem L z (6.4) máme pro řešení (6.2) y_1 a y_2:
$$L(y_1) = 0, \quad L(y_2) = 0.$$
Pro funkci $y = C_1y_1 + C_2y_2$ z linearity L dostáváme
$$L(y) = L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = C_10 + C_20 = 0,$$
a tak je na J y skutečně řešením rovnice (6.2) pro libovolné $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

Definice 6.1 Řekneme, že reálné funkce y_1, y_2, $\dots y_r$, $r \in \mathbb{N}$, definované na intervalu J, jsou *lineárně závislé* na J, existují-li konstanty c_1, c_2, $\dots$, c_r, z nichž aspoň jedna je různá od nuly, tak, že

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots c_ry_r \equiv 0 \qquad \text{na } J, \tag{6.5}$$

(tj. pro všechna $t \in J$ je levá strana rovna nule).

V opačném případě jsou y_1, y_2, $\dots y_r$, $r \in \mathbb{N}$, na J *lineárně nezávislé.*

Pro dvojici funkcí (tento případ nás zajímá nejvíce) to znamená, že jedna je nenulovým násobkem druhé.

Poznámka 6.2 Levou stranu (6.5), tedy $c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots c_ry_r(t)$ nazýváme lineární kombinací funkcí y_1, y_2, $\dots y_r$ s koeficienty c_1, c_2, $\dots$, c_r na intervalu J.

Vyšetřování lineární (ne)závislosti podle definice je obtížné. Naštěstí máme k dispozici praktičtější postup. K tomu budeme potřebovat tzv. wronskián.

Definice 6.2 Buďte $y_1, y_2, \dots y_r$, $r \in \mathbb{N}$, reálné funkce definované na J, mající zde spojité derivace až po řád $r-1$ (včetně).

Potom výraz

$$W(t) = W[y_1(t), y_2(t), \dots y_r(t)] := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_r(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_r'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & \dots & y_r''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(r-1)}(t) & y_2^{(r-1)}(t) & \dots & y_r^{(r-1)}(t) \end{vmatrix}$$

nazýváme *wronskián* (determinant Wronského), $W : J \to \mathbb{R}$.

Nyní si uvedeme větu, která nám v některých případech pomůže určit lineární nezávislost r-tice funkcí na daném intervalu.

Věta 6.3 ([1]) *Buďte y_1, y_2, $\dots y_r$, $r \in \mathbb{N}$, reálné funkce definované na J, které zde mají spojité derivace až po řád $r-1$.*

Jestliže v nějakém bodě $t_1 \in J$ platí

$$W(t_1) = W[y_1(t_1), y_2(t_1), \dots y_r(t_1)] \neq 0,$$

potom jsou funkce y_1, y_2, $\dots y_r$ lineárně nezávislé na J.

Příklad 6.1 Ukážeme lineární nezávislost funkcí e^{-t} a e^{-2t} na $\mathbb{R}$.

Řešení. Jsou lineárně nezávislé, protože

$$W[\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{-2t}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-2t} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-t}(-2)\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2t} = -\mathrm{e}^{-3t} \neq 0,$$

pro $t \in \mathbb{R}$. □

Příklad 6.2 Ukážeme lineární nezávislost funkcí $\sin t$ a $\cos t$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Jsou lineárně nezávislé, protože

$$W[\sin t, \cos t] = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1 \neq 0,$$

pro $t \in \mathbb{R}$. □

Definice 6.3 Každou dvojici lineárně nezávislých řešení y_1 a y_2 dané HLDR$_{2.ř}$ nazveme fundamentální systém řešení HLDR$_{2.ř}$ (též báze řešení HLDR$_{2.ř}$).

Věta 6.4 *Buď y_1 a y_2 fundamentální systém řešení HLDR$_{2.ř}$. Pak každé řešení y této rovnice je tvaru*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

kde C_1 a C_2 jsou vhodné reálné konstanty.

Důsledek 6.1

1. *Je-li y_1 partikulární řešení (6.2), je i $C_1 y_1$ řešení této rovnice.*
2. *Jsou-li y_1 a y_2 partikulární řešení (6.2), pak i každá jejich libovolná lineární kombinace je řešením (6.2).*
3. *Jsou-li y_1 a y_2 lineárně nezávislá partikulární řešení (6.2) (tj. y_1 a y_2 tvoří fundamentální systém řešení (6.2)), pak*

   $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

   je obecné řešení (6.2).
4. *Fundamentální systém řešení každé HLDR$_{2.ř}$ je tvořen dvojicí lineárně nezávislých řešení.*

Příklad 6.3 Mějme HLDR$_{2.ř}$

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0, \quad t \neq 0, \tag{6.6}$$

odkud $p(t) = -\frac{2}{t}$ a $q(t) = \frac{2}{t^2}$.

Funkce $y_1(t) = t$ a $y_2(t) = t^2$ jsou její dvě řešení (ověřte dosazením).

Pomocí wronskiánu,

$$W[t, t^2] = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t - t^2 \not\equiv 0,$$

zjistíme, že to jsou dvě lineárně nezávislá řešení, a tak tvoří fundamentální systém řešení naší rovnice (6.6). Obecné řešení (6.6) tedy můžeme zapsat jako jejich lineární kombinaci

$$\Big[y = C_1 t + C_2 t^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0\Big].$$

$\square$

[6]

1) Dokažte, že funkce

$$y_1 = t \quad \text{a} \quad y_2 = \frac{1}{t},$$

tvoří pro $t \neq 0$ fundamentální systém řešení diferenciální rovnice

$$y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 0.$$

2) Dokažte, že funkce

$$y_1 = t, \quad y_2 = t^2 + 1$$

tvoří fundamentální systém řešení diferenciální rovnice

$$y'' + \frac{2t}{1 - t^2}y' - \frac{2}{1 - t^2}y = 0.$$

Vypočtěte partikulární řešení této rovnice pro počáteční podmínky

$$y(-2) = 6, \quad y'(-2) = 3.$$

6.3 Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu ($\mathrm{HLDR}_{2.ř}$) s konstantními koeficienty

Po prostudování této kapitoly budete schopni pro jakoukoli $\mathrm{HLDR}_{2.ř}$ s konstantními koeficienty nalézt její obecné řešení.

Uvidíte, že postupy v této kapitole jsou velmi „přístupné“, stačí umět řešit kvadratickou rovnici a zapamatovat si tři jednoduché typy řešení.

Zaměříme se na zjednodušenou $\mathrm{HLDR}_{2.ř}$, která bude mít konstantní koeficienty $p(x) \equiv a$, $q(x) \equiv b$, konkrétně:

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{6.7}$$

Tuto rovnici budeme nazývat $\mathrm{HLDR}_{2.ř}$ s konstantními koeficienty.

Řešení této rovnice se hledá ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$ je neznámý parametr. Máme tedy určen hrubý tvar řešení a na nás je, abychom určili příslušnou konkrétní hodnotu parametru λ. Je otázkou, zda vůbec existuje a zda je jediná. Pokusíme se to zjistit dosazením našeho navrženého řešení do studované rovnice (6.7). (Při derivování funkce $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ si můžeme uvědomit „příbuznost“ mezi jejími derivacemi

$$y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda y, \quad y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda y' = \lambda^2 y$$

a naší rovnicí (6.7).)

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= 0, \\ (\mathrm{e}^{\lambda x})'' + a(\mathrm{e}^{\lambda x})' + b(\mathrm{e}^{\lambda x}) &= 0, \\ \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + a\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + b\mathrm{e}^{\lambda x} &= 0, \\ \mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) &= 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme se tedy k rovnici (neboť $\mathrm{e}^{\lambda x}$ je vždy nenulové)

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \tag{6.8}$$

kterou budeme nazývat *charakteristická rovnice* (přidružená k rovnici (6.7)).

Pokud je nějaké λ řešením charakteristické rovnice (6.8), pak funkce $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ je řešením (6.7).

Víme, že každá kvadratická rovnice má dvě řešení $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Při řešení charakteristické (kvadratické) rovnice mohou tedy nastat jen tři následující situace:

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \ \lambda_1 = \lambda_2$,

3) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \ \ (\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}), \ \ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Jak v těchto třech případech vypadá fundamentální systém řešení a tedy i obecné řešení rovnice (6.7) popisuje následující věta.

Věta 6.5 *Mějme HLDR$_{2.ř}$ s konstantními koeficienty (6.7). Označme λ_1 a λ_2 kořeny charakteristické rovnice (6.8).*

1. *Jsou-li λ_1 a λ_2* dvě různá reálná čísla*, pak fundamentální systém řešení (6.7) je tvořen funkcemi*

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \quad a \quad y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x};$$

tedy obecné řešení můžeme zapsat

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Jsou-li λ_1 a λ_2* dvě stejná reálná čísla *(dvojnásobný kořen), pak fundamentální systém řešení (6.7) je tvořen funkcemi*

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \quad a \quad y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda_1 x};$$

tedy obecné řešení (6.7) můžeme zapsat

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 x \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. *Jsou-li $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ a $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $(\beta \neq 0)$,* dvě komplexně sdružená čísla*, pak fundamentální systém řešení (6.7) je tvořen funkcemi*

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x \quad a \quad y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x;$$

tedy obecné řešení (6.7) můžeme zapsat

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Postup při řešení HLDR$_{2.ř}$ s konstantními koeficienty:

1. Sestavíme charakteristickou rovnici.

2. Řešíme charakteristickou rovnici (tj. kvadratickou rovnici).

3. Podle věty 6.5 najdeme fundamentální systém a obecné řešení.

Příklad 6.4 Nalezněte obecná řešení následujících diferenciálních rovnic:

a) $y'' - y' - 2y = 0$,

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$,

c) $y'' + y = 0$.

Řešení. Ve všech případech jde o homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.

ad a) Sestavíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Řešíme charakteristickou rovnici (tj. kvadratickou rovnici):

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Podle věty 6.5 najdeme fundamentální systém řešení:

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{-1t}, \quad y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \mathrm{e}^{2t}.$$

Obecné řešení můžeme zapsat

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

ad b) Sestavíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Řešíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \quad \lambda_1 = \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Podle věty 6.5 najdeme fundamentální systém řešení:

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{-2t}, \quad y_2 = t\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = t\mathrm{e}^{-2t}.$$

Obecné řešení můžeme zapsat

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 t\mathrm{e}^{-2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

ad c) Sestavíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Řešíme charakteristickou rovnici:

$\lambda_1 = \alpha + \beta i = 0 + 1 \cdot i = i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i = 0 - 1 \cdot i, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}.$

Podle věty 6.5 najdeme fundamentální systém řešení:

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t = \mathrm{e}^{0t} \cos 1t = \cos t, \quad y_2 = \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t = \mathrm{e}^{0t} \sin 1t = \sin t.$$

Obecné řešení můžeme zapsat

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Nepovinný dodatek pro $n > 2$

Obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice řádu vyššího než dva, například

$$y''' - 2y'' = 0,$$

se hledá velmi obdobně.

Řešíme příslušnou charakteristickou rovnici:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 0\lambda + 0 = 0 \iff \lambda^2(\lambda - 2) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2.$$

Všechny tři charakteristické kořeny jsou tedy reálné (jeden dvojnásobný).

Fundamentální systém řešení je tvořen následujícími funkcemi:

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{0t} = 1, \quad y_2(t) = t\mathrm{e}^{0t} = t, \quad y_3(t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

Obecné řešení potom sestavíme takto:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + C_3 y_3(t) = C_1 + C_2 t + C_3 \mathrm{e}^{2t}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Nakonec si ukažme, že FSŘ je opravdu tvořen lineárně nezávislými funkcemi:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} 1 & t & \mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 1 & 2\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 0 & 4\mathrm{e}^{2t} \end{vmatrix} = 4\mathrm{e}^{2t} \neq 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 6.5 Nalezněte obecná řešení následujících diferenciálních rovnic:

1) $y'' + 4y = 0, \qquad [y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$
2) $y'' - y' = 0, \qquad [y = C_1 + C_2 e^t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$
3) $y'' - y = 0, \qquad [y = C_1 e^{-t} + C_2 e^t],\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
4) $y'' + y' - 2y = 0, \qquad [y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$
5) $y'' + 3y' - 4y = 0. \qquad [y = C_1 e^{-4t} + C_2 e^t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}]$

6.4 Nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu ($\mathbf{NHLDR_{2.ř}}$)

Po prostudování této kapitoly budete schopni používat metodu variace konstant pro hledání obecného řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu.

Uvidíte, že postupy v této kapitole navazují na podobnou situaci u lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu, takže princip řešení bude obdobný.

Připomeňme si základní tvar nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu:

$$y'' + p(t)y' + q(t) = f(t), \tag{6.9}$$

což při označení

$$L(y) := y'' + p(t)y' + q(t)$$

(L odkazuje na slova „levá" a „lineární") můžeme zapsat i zkráceně:

$$L(y) = f(t). \tag*{L(6.9)}$$

Příslušnou homogenní úlohu (HÚ) podobně zapisujeme:

$$L(y) = 0. \tag{6.10}$$

Věta 6.6 *Je-li Y partikulární řešení $NHLDR_{2.ř.}$ a $\overline{y}$ obecné řešení $HLDR_{2.ř.}$, pak*

$$y = \overline{y} + Y$$

je obecné řešení $NHLDR_{2.ř.}$.

($OŘNHLDR_{2.ř.} = OŘHLDR_{2.ř.} + PŘNHLDR_{2.ř.}$)

Věta dává návod, jak najít obecné řešení NHLDR (obecně i vyššího řádu než druhého).

Postup:

1. K dané NHLDR vytvoříme příslušnou HLDR.

2. Najdeme obecné řešení HLDR, tj. $\overline{y}$, jako lineární kombinaci partikulárních řešení y_1 a y_2, která tvoří fundamentální systém řešení HLDR.

3. Najdeme nějaké partikulární řešení Y NHLDR.

4. Obecné řešení NHLDR je pak $y = \overline{y} + Y$.

Vlastnosti řešení NHLDR

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \text{ je řešením DR } L(y) = f_1(t) \\ y_2 \text{ je řešením DR } L(y) = f_2(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} L(y_1) = f_1(t) \\ L(y_2) = f_2(t) \end{array}.$$

Co z toho vyplývá pro lineární kombinaci těchto dvou funkcí?

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t),$$

a tedy

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad \text{je řešením DR} \quad L(y) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t).$$

Jak hledáme partikulární řešení NHLDR?

Existují dva způsoby nalezení partikulárního řešení Y NHLDR:

1. Metoda variace konstant
   Je to univerzální metoda, která je platná pro DR s konstantními i nekonstantními koeficienty. Předpokládá však, že známe fundamentální systém řešení příslušné HLDR, který ale u rovnice s nekonstantními koeficienty neumíme najít.

   Tento postup je trochu zdlouhavý, proto, pokud je to možné, dáváme přednost následující metodě, která je jednodušší a rychlejší.

2. Metoda neurčitých koeficientů (též metoda odhadu)
   Dá se použít pouze v případě rovnice s konstantními koeficienty a navíc se speciální pravou stranou. Některé funkce totiž často vystupují jako pravé strany lineárních DR a podle tvaru pravé strany rovnice lze u některých speciálních případů odhadnout (a následně přesně dopočítat) tvar partikulárního řešení Y.

6.4.1 Metoda variace konstant pro NHLDR$_{2.ř}$

Podobně jako u lineárních lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu, vyjdeme z obecného řešení HLDR$_{2.ř.}$

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Partikulární řešení Y NLDR$_{2.ř.}$ hledáme v podobném tvaru, jen konstanty C_1 a C_2 nahradíme funkcemi (odtud název metody „variace konstant“):

$$Y = C_1(t) y_1 + C_2(t) y_2.$$

Neznámé funkce $C_1(t)$ a $C_2(t)$ hledáme tak, že Y dosadíme do řešené NHLDR$_{2.ř.}$. K tomu budeme potřebovat i první a druhou derivaci Y.

Nejprve vypočteme Y':

$$Y' = (C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2)' = C_1'(t)y_1 + C_1(t)y_1' + C_2'(t)y_2 + C_2(t)y_2'.$$

Situaci si zjednodušíme tím, že součet členů, ve kterých se vyskytují derivace neznámých funkcí $C_1(t)$ a $C_2(t)$, položíme roven nule:

$$C_1'(t)y_1 + C_2'(t)y_2 = 0.$$

Tím zajistíme, že ve výsledných rovnicích pro neznámé $C_1(t)$ a $C_2(t)$ se nebudou vyskytovat druhé derivace těchto funkcí, neboť nyní máme:

$$Y' = C_1(t)y_1' + C_2(t)y_2'.$$

Můžeme přejít k výpočtu druhé derivace:

$$Y'' = (C_1(t)y_1' + C_2(t)y_2')' = C_1'(t)y_1' + C_1(t)y_1'' + C_2'(t)y_2' + C_2(t)y_2''.$$

Dosadíme do $\mathrm{NHLDR}_{2.\check{r}.}$ $(Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = f(t))$ a upravíme:

$$\begin{aligned}&\Big[C_1'(t)y_1' + C_1(t)y_1'' + C_2'(t)y_2' + C_2(t)y_2''\Big]+\\ &\qquad +p(t)\Big[C_1(t)y_1' + C_2(t)y_2'\Big] + q(t)\Big[C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2\Big] = f(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&C_1(t)\Big[\overbrace{y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1}^{=0}\Big] + C_2(t)\Big[\overbrace{y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2}^{=0}\Big]+\\ &\qquad\qquad +C_1'(t)y_1' + C_2'(t)y_2' = f(t).\end{aligned}$$

Výsledkem je tedy rovnice $C_1'(t)y_1' + C_2'(t)y_2' = f(t)$. Společně s podmínkou $C_1'(t)y_1 + C_2'(t)y_2 = 0$ máme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých funkcích $C_1'(t)$ a $C_2'(t)$:

$$\begin{aligned}C_1'(t)y_1 + C_2'(t)y_2 &= 0,\\ C_1'(t)y_1' + C_2'(t)y_2' &= f(t).\end{aligned} \tag{6.11}$$

Takovou soustavu můžeme řešit různými způsoby, ale pro nás bude výhodné použít tzv. Cramerovo pravidlo. Základním předpokladem je nenulovost determinantu matice soustavy

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že tento determinant je současně wronskiánem pro dvě lineárně nezávislá řešení y_1 a y_2, je skutečně nenulový.

Podle Cramerova pravidla tak máme zajištěnu existenci právě jednoho řešení soustavy, které lze vyjádřit následovně:

$$C_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(t) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-f(t)y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2},$$

$$C_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{f(t)y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}.$$

Nyní již „stačí“ $C_1'(t)$ a $C_2'(t)$ zintegrovat, a tím získat hledané $C_1(t)$ a $C_2(t)$. Označme si

$$C_1(t) = \int \frac{-f(t)y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}\,\mathrm{d}t = K_1(t) + C_1,$$

a

$$C_2(t) = \int \frac{f(t)y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}\,\mathrm{d}t = K_2(t) + C_1.$$

Takto je vidět, že existuje nekonečně mnoho jak funkcí C_1 tak i C_2. Nám ovšem stačí vzít vždy jen jednu, proto si vybereme funkce K_1 a K_2. S touto volbou dostáváme partikulární řešení $\mathrm{NHLDR}_{2.ř.}$

$$Y = K_1(t)y_1 + K_2(t)y_2.$$

Potom obecné řešení $\mathrm{NHLDR}_{2.ř.}$ bude

$$y = \overline{y} + Y = C_1y_1 + C_2y_2 + K_1(t)y_1 + K_2(t)y_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Věta 6.7 *Buď $\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ obecné řešení $HLDR_{2.ř.}$. Potom partikulární řešení $NHLDR_{2.ř.}$ je tvaru*

$$Y = C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2,$$

přičemž funkce $C_1(t)$ a $C_2(t)$ splňují soustavu

$$\begin{aligned} C_1'(t)y_1 + C_2'(t)y_2 &= 0, \\ C_1'(t)y_1' + C_2'(t)y_2' &= f(t). \end{aligned}$$

Obecné řešení $\mathrm{NHLDR}_{2.ř.}$ pak samozřejmě získáme jako součet obecného řešení $\mathrm{HLDR}_{2.ř.}$ a partikulárního řešení $\mathrm{NHLDR}_{2.ř.}$ $y = \overline{y} + Y$.

Poznámka 6.3 Pokud bychom při řešení zapisovali $C_1(t)$ a $C_2(t)$ i s integračními konstantami, tedy

$$C_1(t) = K_1(t) + C_1, \quad C_2(t) = K_2(t) + C_2.$$

tak bychom mohli obecné řešení NHLDR$_{2.\text{ř.}}$ zapsat následovně:

$$\begin{aligned} y &= C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2 = (K_1(t) + C_1)y_1 + (K_2(t) + C_2)y_2 \\ &= K_1(t)y_1 + C_1y_1 + K_2(t)y_2 + C_2y_2 \\ &= \big(C_1y_1 + C_2y_2\big) + \big(K_1(t)y_1 + K_2(t)y_2\big) \\ &= \overline{y} + Y. \end{aligned}$$

Podle této poznámky budeme postupovat v následujících dvou příkladech.

Příklad 6.6 Metodou variace konstant najdeme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - y = \sin t.$$

Řešení. Nejprve řešíme příslušnou homogenní úlohu

$$y'' - y = 0.$$

Jde o rovnici s konstantními koeficienty. Sestavíme a vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\text{(ChR) } \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \text{(FSŘ) } y_1 = \mathrm{e}^t,\ y_2 = \mathrm{e}^{-t}.$$

Obecné řešení HÚ:

$$\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t}.$$

Nyní přejdeme k řešení nehomogenní úlohy metodou variace konstant. Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$y = C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2 = C_1(t)\mathrm{e}^t + C_2(t)\mathrm{e}^{-t},$$

kde $C_1(t)$ a $C_2(t)$ splňují soustavu

$$\begin{array}{c} C_1'(t)\mathrm{e}^t + C_2'(t)\mathrm{e}^{-t} = 0, \\ \underline{C_1'(t)\mathrm{e}^t + C_2'(t)(-\mathrm{e}^{-t}) = \sin t.} \end{array}$$

Řešíme:

$$C_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-t} \\ \sin t & -\mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{-\sin t\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t(-\mathrm{e}^{-t}) - \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-t}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin t,$$

$$C_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ \mathrm{e}^t & \sin t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{\sin t\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t(-\mathrm{e}^{-t}) - \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-t}} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\sin t.$$

Nyní nás čeká integrace.

$$C_1(t) = \int C_1'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t,$$

$$C_2(t) = \int C_2'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{t}\sin t\,\mathrm{d}t.$$

Výpočty necháme pod čarou[7] a nakonec dostáváme

$$C_1(t) = -\frac{1}{4}(\sin t + \cos t)\mathrm{e}^{-t} + C_1,$$

$$C_2(t) = \frac{1}{4}(\cos t - \sin t)\mathrm{e}^{t} + C_2,$$

a tedy obecné řešení nehomogenní úlohy

$$\begin{aligned}
y &= C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2\\
&= \left(-\frac{1}{4}(\sin t + \cos t)\mathrm{e}^{-t} + C_1\right)\mathrm{e}^{t} + \left(\frac{1}{4}(\cos t - \sin t)\mathrm{e}^{t} + C_2\right)\mathrm{e}^{-t}\\
&= -\frac{1}{4}(\sin t + \cos t) + C_1\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{4}(\cos t - \sin t) + C_2\mathrm{e}^{-t}\\
&= \frac{1}{4}(-\sin t - \cos t + \cos t - \sin t) + C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t}\\
&= \frac{1}{4}(-2\sin t) + C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t} = -\frac{1}{2}\sin t + C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t}.
\end{aligned}$$

Závěr: Diferenciální rovnice $y'' - y = \sin t$ má obecné řešení

$$\left[y = -\frac{1}{2}\sin t + C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right].$$

□

Příklad 6.7 Metodou variace konstant najdeme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^{t}}{t}.$$

---

[7]Metodou per partes vypočteme $\int \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = \mathrm{e}^{-t} & v' = \sin t \\ u' = -\mathrm{e}^{-t} & v = -\cos t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-t}(-\cos t) - \int \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = \mathrm{e}^{-t} & v' = \cos t \\ u' = -\mathrm{e}^{-t} & v = \sin t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-t}(-\cos t) - \left(\mathrm{e}^{-t}\sin t + \int \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t\right) = -\mathrm{e}^{-t}(\sin t + \cos t) - \int \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$. (Na obou stranách máme stejný integrál, ale s opačnými znaménky.)

$2\int \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}(\sin t + \cos t) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\int \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}(\sin t + \cos t)\mathrm{e}^{-t} + C}$.

Obdobně $\boxed{\int \mathrm{e}^{t}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)\mathrm{e}^{t} + C}$.

Řešení. Nejprve řešíme příslušnou homogenní úlohu

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Jde o rovnici s konstantními koeficienty. Sestavíme a vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\text{(ChR) } \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{(FSŘ) } y_1 = \mathrm{e}^t,\ y_2 = t\mathrm{e}^t.$$

Obecné řešení HÚ:

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 t\mathrm{e}^t.$$

Nyní přejdeme k řešení nehomogenní úlohy metodou variace konstant. Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$y = C_1(t) y_1 + C_2(t) y_2 = C_1(t)\mathrm{e}^t + C_2(t) t\mathrm{e}^t,$$

kde $C_1(t)$ a $C_2(t)$ splňují soustavu

$$\begin{aligned} C_1'(t)\mathrm{e}^t + C_2'(t) t\mathrm{e}^t &= 0, \\ C_1'(t)\mathrm{e}^t + C_2'(t)[\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t] &= \tfrac{\mathrm{e}^t}{t}. \end{aligned}$$

Tuto soustavu na ukázku nebudeme řešit pomocí Cramerova pravidla, ale pro její jednoduchost nejprve od druhé rovnice odečteme první a dostaneme

$$C_2'(t)\mathrm{e}^t = \frac{\mathrm{e}^t}{t} \ \Rightarrow \ C_2'(t) = \frac{1}{t} \ \Rightarrow \ C_2(t) = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní $C_2'(t) = \frac{1}{t}$ dosadíme zpět do první rovnice a dostaneme:

$$C_1'(t)\mathrm{e}^t + \frac{1}{t} t\mathrm{e}^t = 0, \quad C_1'(t) = -1 \ \Rightarrow \ C_1(t) = \int -1\,\mathrm{d}t = -t + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení nehomogenní úlohy

$$\begin{aligned} y &= C_1(t) y_1 + C_2(t) y_2 \\ &= (-t + C_1)\mathrm{e}^t + (\ln|t| + C_2) t\mathrm{e}^t \\ &= \underbrace{C_1\mathrm{e}^t + C_2 t\mathrm{e}^t}_{=\overline{y}} \underbrace{- t\mathrm{e}^t + \ln|t| t\mathrm{e}^t}_{=Y},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Závěr: Diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^t}{t}$ má obecné řešení

$$\Big[y = C_1\mathrm{e}^t + C_2 t\mathrm{e}^t - t\mathrm{e}^t + \ln|t| t\mathrm{e}^t, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \Big].$$

□

Příklad 6.8 ([6]) 1) Najděte (metodou variace konstant) obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^t}{t^2+1}$$

$$\left[y(t) = \mathrm{e}^t(C_1 + C_2 t) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t \ln(t^2+1) + t\mathrm{e}^t \operatorname{arctg} t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right].$$

2) Najděte (metodou variace konstant) obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' = t\mathrm{e}^t \qquad \left[y(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2 - t\mathrm{e}^t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right].$$

3) Najděte (metodou variace konstant) obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - y' - 12y = 14\mathrm{e}^t \qquad \left[y(t) = C_1\mathrm{e}^{4t} + C_2\mathrm{e}^{-3t} - \frac{7}{6}\mathrm{e}^t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right].$$

4) Najděte (metodou variace konstant) řešení počáteční úlohy

$$y''-2y'+y = 3\sqrt{t}\mathrm{e}^t, \quad y(1) = \mathrm{e},\ y'(1) = 2\mathrm{e} \qquad \left[y(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{10}(8\sqrt{t^5} + 5t - 3)\right].$$

5) Najděte (metodou variace konstant) obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + 1}$$

$$\left[y(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t}\ln(1+\mathrm{e}^{-t}) - \mathrm{e}^{-2t}\ln(1+\mathrm{e}^t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right].$$

6.4.2 Metoda neurčitých koeficientů pro NHLDR$_{2.ř}$ s konstantními koeficienty

Po prostudování této kapitoly budete schopni používat metodu neurčitých koeficientů pro hledání obecného řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu.

Uvidíte, že postupy v této kapitole budou o něco jednodušší a mnohdy rychleji povedou k cíli než při použití variace konstant.

Jde o metodu kvalifikovaného odhadu tvaru partikulárního řešení nehomogenní úlohy, kde pro jisté typy pravých stran víme, jak má příslušné partikulární řešení vypadat, tedy až na jisté neznámé konstanty, které musíme dopočítat dosazením tohoto částečně neurčitého řešení do původní (řešené) rovnice.

Tato metoda může vést k cíli rychleji a jednodušeji než variace konstant, ALE její použití se omezuje jen na rovnice s konstantními koeficienty a pravá strana musí být speciálního typu. Jedná se o lineární kombinaci funkcí tvaru

$$f_1(t) = p_1(t)\mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad f_2(t) = p_2(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad f_3(t) = p_3(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t,$$

kde p_1, p_2, p_3 jsou polynomy a $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (pro $\lambda = 0$ dostáváme „čistý“ polynom $p_1(t)$).

Již jsme si ukazovali, že pokud budeme znát řešení pro každou pravou stranu zvlášť, pak výsledné celkové řešení bude lineární kombinací dílčích řešení, se stejnými koeficienty jako jsou použity u pravých stran:

$$\Big(L(y_1) = f_1(t),\ L(y_2) = f_2(t),\ L(y_3) = f_3(t)\Big) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad L(ay_1 + by_2 + cy_3) = af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t).$$

Jistě jste si všimli, že (až na násobení polynomem) „povolenými“ pravými stranami jsou funkce, které se objevují jako řešení homogenní úlohy s konstantními koeficienty:

- $\mathrm{e}^{\lambda t}$ pro reálný charakteristický kořen λ,
- $\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$ a $\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$ pro komplexní char. kořen $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$.

Takto může dojít ke „konfliktu“ při volbě (neurčitého tvaru) partikulárního řešení Y. Budeme tomu čelit případným vynásobením vhodnou mocninou t. Abychom mohli tento postup formalizovat, označíme si exponent t písmenem N (N jako násobnost).

Bude nás zajímat vztah mezi λ z pravé strany a charakteristickými kořeny příslušné homogenní úlohy. Tento vztah zaznamenáme pomocí veličiny N, která v našem případě může nabývat hodnoty

$$N = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \lambda \text{ není charakteristickým kořenem,} \\ 1, & \text{pokud } \lambda \text{ je jednoduchým charakteristickým kořenem,} \\ 2, & \text{pokud } \lambda \text{ je dvojnásobným charakteristickým kořenem.} \end{cases}$$

(Obecně, u rovnic n-tého řádu, může být $N = k$, $k \leq n$, když je λ k-násobným charakteristickým kořenem.)

Při tomto nastavení můžeme vyslovit následující větu o volbě partikulárního řešení.

Věta 6.8 *Nechť p je polynom stupně $s \geq 0$, nechť*

$$y'' + ay' + by = f(t) \tag{6.12}$$

je rovnice s konstantními koeficienty a nechť N je výše definovaná veličina vztažená k naší rovnici (6.12).

Pak platí:

a) Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ a $f(t) = p(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, existuje polynom q stupně nejvýše s tak, že funkce

$$Y(t) := t^N q(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

je partikulárním řešením rovnice (6.12).

b) Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, a je-li $f(t) = p(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$ nebo $f(t) = p(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$, existují polynomy q a r stupně nejvýše s tak, že funkce

$$Y(t) := t^N \mathrm{e}^{\alpha t}(q(t)\cos\beta t + r(t)\sin\beta t)$$

je partikulárním řešením rovnice (6.12).

Ukázky volby Y

$\mathbb{R}$-a) Shoda s jednoduchým charakteristickým kořenem: $y'' - y = (t^2 + 2t + 1)\mathrm{e}^t$

HÚ: (ChR) $\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1;$

NHÚ: $f(t) = (t^2 + 2t + 1)\mathrm{e}^t \approx p(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, $\quad p(t) = t^2 + 2t + 1 \Rightarrow \operatorname{st} p = 2$,
$\lambda = 1 = \lambda_1 \Rightarrow N = 1;$

$$Y = t^N \cdot q(t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = t^1 \cdot (At^2 + Bt + C) \cdot \mathrm{e}^{1 \cdot t} = (At^3 + Bt^2 + Ct) \cdot \mathrm{e}^t.$$

$\mathbb{R}$-b) Neshoda s charakteristickými kořeny: $\quad y'' - y = (2t+5)\mathrm{e}^{2t}$:

HÚ: (ChR) $\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1;$

NHÚ: $f(t) = (2t+5)\mathrm{e}^{2t} \approx p(t)\mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad p(t) = 2t+5 \Rightarrow \operatorname{st} p = 1,$
$\lambda = 2 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow N = 0;$

$$Y = t^N \cdot q(t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = t^0 \cdot (At+B) \cdot \mathrm{e}^{2\cdot t} = (At+B) \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

$\mathbb{R}$-c) Shoda s (dvoj)násobným charakteristickým kořenem: $\quad y'' - 2y' + y = 2\mathrm{e}^t$:

HÚ: (ChR) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1;$

NHÚ: $f(t) = 2\mathrm{e}^t \approx p(t)\mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad p(t) \equiv 2 \Rightarrow \operatorname{st} p = 0,$
$\lambda = 1 = \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow N = 2;$

$$Y = t^N \cdot q(t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = t^2 \cdot (A) \cdot \mathrm{e}^{1\cdot t} = At^2 \cdot \mathrm{e}^t.$$

$\mathbb{C}$-d) Shoda s charakteristickým kořenem: $\quad y'' + 4y = \sin 2t$:

HÚ: (ChR) $\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0 + 2\,\mathrm{i},\ \lambda_2 = 0 - 2\,\mathrm{i};$

NHÚ: $f(t) = \sin 2t \approx p(t)\mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t, \qquad p(t) \equiv 1 \Rightarrow \operatorname{st} p = 0,$
$\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta = 0 + 2\,\mathrm{i} = \lambda_1 \Rightarrow N = 1;$

$$\begin{aligned} Y &= t^N \mathrm{e}^{\alpha t}(q(t)\cos\beta t + r(t)\sin\beta t) = t^1 \mathrm{e}^{0\cdot t}(A\cos 2t + B\sin 2t) = \\ &= t(A\cos 2t + B\sin 2t). \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$-e) Neshoda s charakteristickými kořeny: $\quad y'' + 4y = \mathrm{e}^{3t}\cos 2t$:

HÚ: (ChR) $\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0 + 2\,\mathrm{i},\ \lambda_2 = 0 - 2\,\mathrm{i};$

NHÚ: $f(t) = \mathrm{e}^{3t}\cos 2t \approx p(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,$

$p(t) \equiv 1 \Rightarrow \operatorname{st} p = 0, \qquad \lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta = 3 + 2\,\mathrm{i} \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow N = 0;$

$$\begin{aligned} Y &= t^N \mathrm{e}^{\alpha t}(q(t)\cos\beta t + r(t)\sin\beta t) = t^0 \mathrm{e}^{3t}\big(A\cos 2t + B\sin 2t\big) \\ &= \mathrm{e}^{3t}\big(A\cos 2t + B\sin 2t\big). \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$-f) Shoda s charakteristickým kořenem: $\quad y'' - 4y' + 5y = (t^2+1)\mathrm{e}^{2t}\cos t$:

HÚ: (ChR) $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2 + \mathrm{i},\ \lambda_2 = 2 - \mathrm{i};$

NHÚ: $f(t) = (t^2+1)\mathrm{e}^{2t}\cos t \approx p(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,$

$p(t) = (t^2+1) \Rightarrow \operatorname{st} p = 2, \qquad \lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta = 2 + \mathrm{i} = \lambda_1 \Rightarrow N = 1;$

$$\begin{aligned} Y &= t^N \mathrm{e}^{\alpha t}(q(t)\cos\beta t + r(t)\sin\beta t) \\ &= t^1 \mathrm{e}^{2\cdot t}\Big[(At^2 + Bt + C)\cos t + (Dt^2 + Et + F)\sin t\Big] \\ &= \mathrm{e}^{2\cdot t}\Big[(At^3 + Bt^2 + Ct)\cos t + (Dt^3 + Et^2 + Ft)\sin t\Big]. \end{aligned}$$

Řešené příklady

Příklad 6.9 Metodou neurčitých koeficientů nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - y = \sin t.$$

Řešení. Nejprve řešíme příslušnou homogenní úlohu

$$y'' - y = 0.$$

Jde o rovnici s konstantními koeficienty. Sestavíme a vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\text{(ChR) } \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \text{(FSŘ) } y_1 = \mathrm{e}^t,\ y_2 = \mathrm{e}^{-t}.$$

Obecné řešení HÚ:

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-t}.$$

Nyní přejdeme k řešení nehomogenní úlohy metodou neurčitých koeficientů. Rozklíčujeme pravou stranu:

$$f(t) = \sin t = \mathrm{e}^{0\cdot t} \sin 1 \cdot t \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0 + i \cdot 1 = i \notin \{1, -1\} \quad \Longrightarrow \quad N = 0.$$

Partikulární řešení nehomogenní úlohy tedy budeme hledat ve tvaru

$$Y = t^0 \mathrm{e}^{0\cdot t}(A \cos 1 \cdot t + B \sin 1 \cdot t) = A \cos t + B \sin t.$$

Ještě vypočteme první a druhou derivaci a dosadíme do nehomogenní úlohy:

$$Y' = -A \sin t + B \cos t, \qquad Y'' = -A \cos t - B \sin t,$$

$$\begin{aligned} Y'' - Y &= \sin t, \\ (-A \cos t - B \sin t) - (A \cos t + B \sin t)Y &= \sin t, \\ -2A \cos t - 2B \sin t &= \sin t, \\ -2A \cos t - (2B + 1) \sin t &= 0. \end{aligned}$$

Aby byla splněna rovnost (jde vlastně o lineární kombinaci lineárně nezávislých funkcí), musí se oba koeficienty rovnat nule:

$$(-2A = 0,\ -(2B + 1) = 0) \quad \Longrightarrow \quad (A = 0,\ B = -\frac{1}{2}),$$

a tedy $Y = 0 \cdot \cos t - \frac{1}{2} \sin t = -\frac{1}{2} \sin t$.
Závěr: Diferenciální rovnice $y'' - y = \sin t$ má obecné řešení

$$\left[y = \overline{y} + Y = C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2} \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right].$$

□

Příklad 6.10 Metodou neurčitých koeficientů vyřešíme počáteční úlohu

$$y'' + 2y' + y = t^2 + \cos t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Řešení. Pravá strana je složena ze dvou částí:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = t^2 + \cos t.$$

K řešené rovnici zapíšeme dvě dílčí:

$$y'' + 2y' + y = t^2 \quad \text{a} \quad y'' + 2y' + y = \cos t.$$

Součet jejich řešení nám dá řešení původní rovnice:

$$\big(L(y_1) = f_1(t), \quad L(y_2) = f_2(t)\big) \quad \Longrightarrow \quad L(y_1 + y_2) = f_1(t) + f_2(t).$$

HÚ je stejná pro obě dílčí rovnice.

– Char. rovnice: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, $(\lambda + 1)^2 = 0$.

– Char. kořeny: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

– OŘHÚ: $\overline{y} = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t}$.

Nyní budeme hledat partikulární řešení dílčích rovnic.

1) Pro pravou stranu $f_1(t) = t^2 = t^2\mathrm{e}^{0t}$ máme

$$s = 2, \quad \lambda = 0 \neq \lambda_{1,2} \ \Rightarrow \ N = 0.$$

Partikulární řešení bude mít (neurčitý) tvar

$$Y_1(t) := t^N q(t)\mathrm{e}^{\lambda t} = t^0(At^2 + Bt + C)\mathrm{e}^{0t} = At^2 + Bt + C.$$

Dopočteme derivace: $Y_1'(t) = 2At + B, \quad Y_1''(t) = 2A$.
Dosadíme do rovnice $Y_1'' + 2Y_1' + Y_1 = f_1(t)$:

$$2A + 2(2At + B) + (At^2 + Bt + C) = t^2,$$

$$At^2 + (4A + B)t + (2A + 2B + C) = 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t + 0 \cdot 1,$$

a tedy (porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin t):

$$\begin{array}{r} A = 1 \\ 4A + B = 0 \\ 2A + 2B + C = 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rr} A = & 1 \\ B = & -4 \\ C = & 6 \end{array} \Longrightarrow Y_1(t) = t^2 - 4t + 6.$$

2) Pro pravou stranu $f_2(t) = \cos t = 1 \cdot \mathrm{e}^{0t} \cos 1 \cdot t$ máme

$$s = 0, \quad \lambda = 0 + i \cdot 1 \neq \lambda_{1,2} \ \Rightarrow \ N = 0.$$

Partikulární řešení bude mít (neurčitý) tvar

$$\begin{aligned} Y_2(t) &:= t^N \mathrm{e}^{\alpha t}(q(t)\cos\beta t + r(t)\sin\beta t) \\ &= t^0 \mathrm{e}^{0t}(A\cos 1\cdot t + B\sin 1\cdot t) = A\cos t + B\sin t). \end{aligned}$$

Dopočteme derivace: $Y_2'(t) = -A\sin t + B\cos t, \quad Y_2''(t) = -A\cos t - B\sin t.$
Dosadíme do rovnice $Y_2'' + 2Y_2' + Y_2 = f_2(t)$:

$$(-A\cos t - B\sin t) + 2(-A\sin t + B\cos t) + (A\cos t + B\sin t) = \cos t,$$

$$2B\cos t - 2A\sin t = 1\cdot\cos t + 0\cdot\sin t,$$

a tedy (porovnáme koeficienty u jednotlivých (lineárně nezávislých) funkcí $\cos t$ a $\sin t$):

$$\begin{array}{r} 2B = 1 \\ \underline{-2A = 0} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} A = 0 \\ B = \frac{1}{2} \end{array} \Longrightarrow Y_2(t) = \frac{1}{2}\sin t.$$

Nyní dílčí řešení Y_1 a Y_2 sečteme. Partikulární řešení naší rovnice je

$$Y = Y_1 + Y_2 = t^2 - 4t + 6 + \frac{1}{2}\sin t.$$

Obecné řešení rovnice:

$$y = \overline{y} + Y = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t} + t^2 - 4t + 6 + \frac{1}{2}\sin t.$$

Počáteční úloha $y(0) = y'(0) = 0$:

$$y'(t) = (-C_1 + C_2 - C_2 t)\mathrm{e}^{-t} + 2t - 4 + \frac{1}{2}\cos t,$$

$$(y(0) =)\ (C_1 + C_2\cdot 0)\mathrm{e}^{-0} + 0^2 - 4\cdot 0 + 6 + \frac{1}{2}\sin 0 = 0,$$

$$(y'(0) =)\ (-C_1 + C_2 - C_2\cdot 0)\mathrm{e}^{-0} + 2\cdot 0 - 4 + \frac{1}{2}\cos 0 = 0.$$

$$\begin{array}{r} (y(0) =)\ C_1 + 6 = 0, \\ \underline{(y'(0) =)\ -C_1 + C_2 - 4 + \frac{1}{2} = 0.} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} C_1 = -6, \\ C_2 = -\frac{5}{2}. \end{array}$$

Řešení počáteční úlohy:

$$y = (-6 - \frac{5}{2}t)\mathrm{e}^{-t} + t^2 - 4t + 6 + \frac{1}{2}\sin t.$$

□

Příklad 6.11 Nalezněte obecná řešení následujících diferenciálních rovnic:

1) $y'' + 4y = \mathrm{e}^t \cos 2t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$

$$\left[y(t) = \frac{16}{17}\cos 2t - \frac{9}{34}\sin 2t + \frac{1}{17}\mathrm{e}^t \cos 2t + \frac{4}{17}\mathrm{e}^t \sin 2t\right].$$

2) $y'' - y' = t,$ $\left[y(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^t - \dfrac{1}{2}t^2 - t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right].$

3) $y'' - y = t,$ $\left[y(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t} - t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right].$

4) $y'' + y' - 2y = 3t\mathrm{e}^t,$ $\left[y(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-2t} - \left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t}{2}\right),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right].$

5) $y'' + 3y' - 4y = \mathrm{e}^{-4t} + t\mathrm{e}^{-t},$

$$\left[y(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-4t} - \frac{t}{5}\mathrm{e}^{-4t} - \left(\frac{t}{6} + \frac{1}{36}\right)\mathrm{e}^{-t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right].$$

Část II
Diferenční rovnice

7 Úvodní motivační příklad

Po prostudování této kapitoly budete schopni rozpoznat diferenční rovnice a nalézt obecné řešení některých speciálních typů diferenčních rovnic prvního řádu.

Uvidíte, že s diferenčními rovnicemi jste se již setkali, jde vlastně o rekurentní zadání posloupností (tyto posloupnosti budou řešeními těchto rovnic).

Uvažujme veličinu, jejíž hodnoty nás zajímají pouze v nějakých diskrétních okamžicích. Jako ilustrační příklad budeme uvažovat stav populace králíka divokého v Austrálii. Ten se tam dostával s prvními loděmi již od roku 1788, ale zajímavější vývoj nastává až od roku 1859, kdy farmář T. A. vysazuje na svém pozemku 24 králíky. Odhaduje se, že během pouhých patnácti let jejich počet narostl na dva miliony. Tyto hodnoty můžeme zapsat

$$x(1859) = 24, \quad x(1874) = 2\,000\,000.$$

Tento zápis má tu výhodu, že okamžitě víme, ke kterému roku je ten který počet vztažen. Můžeme ovšem použít i jiné označení,

$$x(0) = 24, \quad x(15) = 2\,000\,000,$$

které nám zase říká, že na počátku jich bylo 24, pak čtrnáct údajů chybí a po patnácti časových jednotkách (letech) máme stav 2 000 000. Obě značení jsou možná, ale v teorii je běžnější to druhé.

Představme si, že žijeme právě v roce 1874 a zajímá nás, jak by se mohly počty králíku do budoucna vyvíjet. Máme tedy k dispozici pouze údaje za roky 1859 a 1874 (resp. 0 a 15). O králících toho mnoho nevíme, ale to nám nebrání, čistě teoreticky, matematicky prozkoumat některé jednoduché hypotézy:

a) *Růst populace je více-méně konstantní*, tedy když za patnáct let přibyly zhruba dva miliony králíků, tak za dalších patnáct let můžeme očekávat zhruba čtyři miliony ($x(30) = 4\,000\,000$). Takový model jistě není příliš důvěryhodný, ale zkuste se zamyslet, jestli jej někdy v životě (většinou mylně) nepoužíváme.

   Ale berme to teď čistě modelově. Jak můžeme matematicky zapsat, že každoroční přírůstek je konstantní? Můžeme použít zápis (P je onen konstantní přírůstek)
   $$x(n+1) = x(n) + P, \quad n \geq 0$$
   (v našem případě máme $P = \frac{2\,000\,000 - 24}{15}$).

S rovnicí $x(n+1) = x(n) + P$ jste se již dříve mohli setkat při rekurentním zadání posloupností. My je budeme nazývat *diferenční rovnice* a posloupnostem, které jsou jimi takto rekurentně zadány říkáme *řešení diferenční rovnice*. Pokud na ta řešení nebudeme mít nějaké dodatečné požadavky, tak jich bude nekonečně mnoho, například posloupnosti:

$$1, 1+P, 1+2P, 1+3P, \dots \qquad \text{nebo} \qquad 25+P, 25+2P, 25+3P, \dots .$$

V našem příkladu získáme potřebnou posloupnost tak, že k rovnici přidáme tzv. počáteční podmínku $x(0) = 24$ (hodnotu $x(15)$ jsme již použili pro výpočet P), a tak dostáváme

$$x(n+1) = x(n) + P, \quad x(0) = 24, \; n \geq 0.$$

Řešením je tedy posloupnost

$$x(n) = 24 + n \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15}, \; n \geq 0.$$

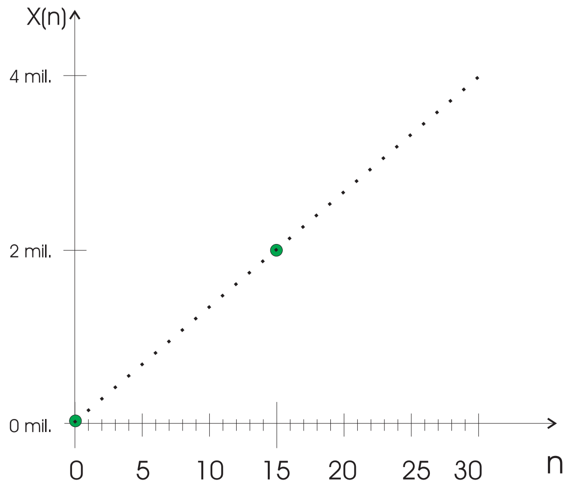
Snadno nahlédneme, že skutečně

$$x(0) = 24 + 0 \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15} = 24, \quad x(15) = 24 + 15 \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15} = 2\,000\,000$$

a

$$x(30) = 24 + 30 \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15} = 3\,999\,976.$$

Tento vývoj je graficky znázorněn na obrázku 17.



Obrázek 17: Model konstantního růstu

b) *Populace v následujícím roce je vždy k-násobkem populace předchozího roku,* $k > 0$ ($k > 1$ znamená zvětšování počtu, $k = 1$ stagnace počtu a $k \in (0; 1)$ pokles). Dostáváme diferenční rovnici s počáteční podmínkou

$$x(n+1) = k \cdot x(n), \quad x(0) = 24, \quad n \geq 0.$$

Řešení:

$x(0) = 24$, $x(1) = k{\cdot}x(0) = 24{\cdot}k$, $x(2) = k{\cdot}x(1) = 24{\cdot}k^2, \dots x(n) = 24{\cdot}k^n, \dots$.

Neznámou konstantu k vypočteme z rovnice pro požadovanou hodnotu modelu pro $n = 15$:

$$x(15) = 2\,000\,000,$$

tedy po dosazení:

$$24 \cdot k^{15} = 2\,000\,000, \quad k^{15} = \frac{2\,000\,000}{24}, \quad k = \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{1}{15}} \doteq 2{,}13.$$

Se nyní známým k můžeme diferenční rovnici (model) konkretizovat:

$$x(n+1) = \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{1}{15}} \cdot x(n), \quad x(0) = 24, \quad n \geq 0.$$

Řešení:

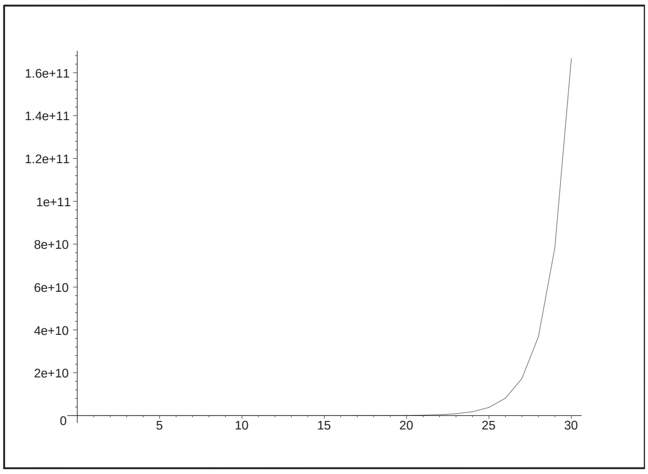
$$x(n) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{n}{15}}, \quad n \geq 0.$$

Výpočty:

$$x(0) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{0}{15}} = 24, \quad x(15) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{15}{15}} = 2\,000\,000,$$

$$x(30) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{30}{15}} = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{2} \doteq 166\,666\,666\,666.$$

Tento vývoj je graficky znázorněn na obrázku 18.



Obrázek 18: Model exponenciálního růstu

8 Diferenční rovnice — základní pojmy

Diferenční rovnice se používají k popisu vývoje nějaké veličiny v (po sobě jdoucích) diskrétních časových okamžicích. Pro jednoduchost si tyto okamžiky budeme označovat pomocí nezáporných celých čísel $n \geq n_0 \geq 0$. Hodnotu zkoumané veličiny v čase n budeme například značit $x(n)$ (nebo $y(n)$). Pokud bereme v úvahu neukončený vývoj veličiny x, potom jde vlastně o posloupnost $(x(n))_{n=n_0}^{+\infty}$

My si pojem *diferenční rovnice* zúžíme na rekurentní zadání[8] takových posloupností.

Řešením diferenční rovnice budeme rozumět onu (skrytě) zadanou posloupnost. Vyřešením diferenční rovnice budeme rozumět nalezení vztahu pro n-tý člen této posloupnosti.

Příklad 8.1 Například rekurentní zadání

$$x(n+1) = x(n) + 2, \quad n \geq 0,$$

reprezentuje všechny aritmetické posloupnosti s diferencí 2.

To znamená, že sama o sobě má nekonečně mnoho řešení, která můžeme zapsat:

$$x(n) = x_0 + 2n, \quad n \geq 0,\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

Tuto „bezbřehost“ můžeme omezit přidáním dalších podmínek na řešení — standardně jedné nebo více hodnot řešení — nejběžněji na počátku posloupnosti.

Takto můžeme získat (počáteční) úlohu s právě jedním řešením, nebo dokonce bez řešení:

[8] Vzájemná (po posloupnosti klouzající) závislost několika po sobě jdoucích členů posloupnosti společně s určitým počtem počátečních hodnot této posloupnosti.

- Úloha

$$x(n+1) = x(n) + 2, \quad x(0) = 1,$$

má právě jedno řešení

$$x(n) = 1 + 2n,\ n \geq 0, \qquad (\text{tedy} \quad 1, 3, 5, 7, 9, \dots).$$

- Na druhou stranu úloha

$$x(n+1) = x(n) + 2, \quad x(0) = 1,\ x(1) = 4,$$

nemá řešení žádné, neboť první podmínkou je již řešení dáno jednoznačně, a tak když se druhou podmínkou „netrefíme" do již vybraného řešení, získáme neřešitelnou úlohu.

□

Jaký počet počátečních podmínek je tedy „bezpečný"? Zpravidla to bude dáno *řád*em *diferenční rovnice*, což je rozdíl nejvyššího a nejnižšího indexu v diferenční rovnici.

V předchozí úloze máme rozdíl indexů

$$(n+1) - n = 1,$$

jde tedy o diferenční rovnici prvního řádu.

Podobně je rovnice

$$2x(n+5) - 3x(n+1) + 2x(n-3) = 0$$

osmého řádu, neboť $(n+5) - (n-3) = 8$.

V dalším se budeme zabývat pouze několika speciálními typy diferenčních rovnic. Nejdůležitější „specialitou" bude jejich *linearita* — jednotlivé $x(i)$ jsou vždy v první mocnině a nejsou ve vzájemném součinu.

Tedy

$$x(n+2) - \sqrt{n!}x(n+1) + n^{35}x(n) = 625 \sin n$$

je lineární diferenční rovnice, zatímco

$$x(n+1) \cdot x(n) = 1$$

není lineární. Říkáme, že je nelineární.

Obecně nelinearita přináší obtížnější, hůře uchopitelné, problémy. To jsme ostatně poznali již u diferenciálních rovnic, v oblasti diferenčních rovnic je situace obdobná.

9 Lineární diferenční rovnice prvního řádu

V této kapitole se budeme věnovat pouze typické lineární *nehomogenní* rovnici prvního řádu s počáteční podmínkou, tedy počáteční úloze:

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0. \tag{9.1}$$

K ní příslušná *homogenní* rovnice (se stejnou počáteční podmínkou) je potom dána předpisem

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0. \tag{9.2}$$

U obou rovnic předpokládáme, že $a(n) \neq 0$ a $a(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0 \geq 0$.

Řešení počáteční úlohy (9.2) můžeme získat prostým iterováním:

$$\begin{aligned}
x(n_0+1) &= a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0,\\
x(n_0+2) &= a(n_0+1)x(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)x_0,\\
x(n_0+3) &= a(n_0+2)x(n_0+2) = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0.
\end{aligned}$$

A pomocí indukce snadno nahlédneme, že[9]

$$\begin{aligned}
x(n) &= x(n_0+n-n_0)\\
&= a(n-1)a(n-2)\cdots a(n_0)x_0\\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0.
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Jednoznačné řešení počáteční úlohy (9.1) může být nalezeno následovně:

$$\begin{aligned}
x(n_0+1) &= a(n_0)x_0 + g(n_0),\\
x(n_0+2) &= a(n_0+1)x(n_0+1) + g(n_0+1)\\
&= a(n_0+1)a(n_0)x_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1).
\end{aligned}$$

Dá se dokázat, opět pomocí matematické indukce, že pro všechna $n \geq n_0 \geq 0$,

$$x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r). \tag{9.4}$$

[9] Připomeňme, že při zkráceném zápisu součinu a součtu prvků ve speciálních případech platí: $\prod_{i=k+1}^{k} a(i) = 1$ a $\sum_{i=k+1}^{k} a(i) = 0$.

9.1 Důležité speciální případy

Existují dva speciální případy úlohy (9.1), které jsou důležité v mnoha aplikacích. Prvním je případ konstantního koeficientu $a(n)$ ($a(n) \equiv a$), (navíc také pro zjednodušení budeme uvažovat pouze případ $n_0 = 0$):

$$x(n+1) = ax(n) + g(n), \quad x(0) = x_0. \tag{9.5}$$

S použitím (9.4) zde dostaneme řešení

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k). \tag{9.6}$$

Vzorec (9.4) také použijeme pro případ $n_0 \neq 0$.

Druhé, ještě větší zjednodušení, představuje konstantní nehomogenní člen $g(n)$ ($g(n) \equiv b$). Počáteční úloha

$$x(n+1) = ax(n) + b, \quad x(0) = x_0, \tag{9.7}$$

má řešení (opět využijeme (9.6))

$$x(n) = \begin{cases} a^n x_0 + b\left[\frac{a^n-1}{a-1}\right], & \text{jestliže } a \neq 1, \\ x_0 + bn, & \text{jestliže } a = 1. \end{cases} \tag{9.8}$$

Na procvičení předchozích formulí uvedeme několik příkladů.

Příklad 9.1 ([2]) Vyřešíme rovnici

$$x(n+1) = (n+1)x(n) + 2^n(n+1)!, \quad x(0) = 1, \quad n \geq 0.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} x(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) \\ &= \left[\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)\right] 1 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\right] 2^r(r+1)! \\ &= n! + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\frac{n!}{(r+1)!}\right] 2^r(r+1)! \\ &= n! + \sum_{r=0}^{n-1} n! 2^r \\ &= 2^n n!, \end{aligned}$$

neboť

$$n! + \sum_{r=0}^{n-1} n!2^r = n! \left(1 + \sum_{r=0}^{n-1} 2^r\right) = n! \left(1 + 1\frac{1-2^n}{1-2}\right) = n!\,(1 - 1 + 2^n) = n!2^n.$$

□

Příklad 9.2 ([2]) Vyřešíme počáteční úlohu

$$x(n+1) = 2x(n) + 3^n, \quad x(1) = 0{,}5.$$

Řešení. $a(n) \equiv 2$ a $n_0 = 1$, tudíž

$$\begin{aligned} x(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) = \left[\prod_{i=1}^{n-1} a\right] y_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a\right] g(r) \\ &= \left[a^{n-1}\right] y_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \left[a^{n-r-1}\right] g(r) = \left[2^{n-1}\right] 0,5 + \sum_{r=1}^{n-1} 2^{n-r-1} 3^r \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^r = 2^{n-2} + 2^{n-1} \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{2}}\right)\right] \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1}\left[-3\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right)\right] = 2^{n-2} + 2^{n-1}\left[-3 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right] \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1}\left[-3 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right] = 2^{n-2} - 3\cdot 2^{n-1} + 2^n\left(\frac{3}{2}\right)^{n} \\ &= 2^{n-2} - 6\cdot 2^{n-2} + 3^n = 3^n - 5\cdot 2^{n-2}. \end{aligned}$$

□

Příklad 9.3 ([2]) Pacient užívá lék vždy po čtyřech hodinách. Nechť $D(n)$ je množství účinné látky v krevním systému v n-tém intervalu. Tělo během každého intervalu eliminuje p-tinu účinné látky. Nalezněte $D(n)$ a $\lim_{n\to\infty} D(n)$, jestliže užívaná dávka je D_0.

Řešení. Nejprve musíme převést slovní zadání do rovnice, kterou potom vyřešíme. Zřejmě

$$D(n+1) = (1-p)D(n) + D_0.$$

S využitím (9.8) dostáváme

$$D(n) = \left[D_0 - \frac{D_0}{p}\right](1-p)^n + \frac{D_0}{p},$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} D(n) = \frac{D_0}{p}. \tag{9.9}$$

Nechť $D_0 = 2\,[cm^3]$ a $p = 0,25$, potom původní rovnice je

$$D(n+1) = 0,75D(n) + 2, \quad D_0 = 2.$$

Následující tabulka obsahuje hodnoty $D(n)$ pro $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D(n)$	2	3.5	4.62	5.47	6.1	6.58	6.93	7.2	7.4	7.55	7.66

Z (9.9) zjistíme, že rovnovážným stavem množství účinné látky v těle je

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D(n) = 8\left[cm^3\right].$$

□

Příklad 9.4 ([2]) Umořování je proces, při kterém je splácen dluh (ne)pravidelnými platbami v pravidelných intervalech. Každá splátka se skládá z úroku za příslušné období a z částky snižující dluh (úmoru).

Nechť do každého období vstupujeme s dluhem $p(n)$, který je v tomto období úročen s úrokovou mírou r, vztaženou k platební periodě. Na konci n-tého období je realizována splátka $g(n)$.

Formulace našeho modelu je založena na faktu, že dluh $p(n+1)$ na počátku $(n+1)$-ho období je roven předchozí hodnotě dluhu $p(n)$, k níž musíme přičíst úrok za poslední období, $rp(n)$ a naopak odečíst splátku $g(n)$. Tedy

$$p(n+1) = p(n) + rp(n) - g(n) = (1+r)p(n) - g(n), \quad p(0) = p_0,$$

kde p_0 značí počáteční hodnotu dluhu. Jde o případ s konstantním koeficientem u $p(n)$, takže můžeme využít (9.6)

$$p(n) = (1+r)^n p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} g(k).$$

Ve speciálním případu může jít o úlohu s konstantní splátkou ($g(n)$ je konstantní) nebo s konstantním úmorem ($p(n+1) - p(n)$ je konstantní. Úloha na výpočet pevného počtu n konstantních splátek T nás vede k rovnici $p(n) = 0$, konkrétně

$$p(n) = (1+r)^n p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} T = (1+r)^n p_0 + \frac{(1+r)^n - 1}{r} T = 0.$$

Odtud

$$T = p_0 \left[\frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} \right].$$

Pro $p_0 = 100\,000$, $r = 0,1$ a $n = 5$ dostaneme

$$T = 100\,000 \left[\frac{0,1}{1 - (1+0,1)^{-5}} \right] \approx 26\,380.$$

Umořovací plán naleznete v tabulce 1.

k	Dluh $p(k)$	Splátka $g(k)$	Úrok $rp(k)$	Úmor $g(k) - rp(k)$	Nový dluh $p(k+1)$
0	100 000	26 380	10 000	16 380	83 620
1	83 620	26 380	8 362	18 018	65 602
2	65 602	26 380	6 560	19 820	45 782
3	45 782	26 380	4 578	21 802	23 980
4	23 980	26 380	2 398	23 982	0
5	0				

Tabulka 1: Umořovací plán

Příklady jsou převzaty z [2].

Příklad 9.5 Nalezněte řešení následujících úloh (homogenní případ):

1. $x(n+1) - (n+1)x(n) = 0$, $x(0) = c$.
2. $x(n+1) - 3^n x(n) = 0$, $x(0) = c$.
3. $x(n+1) - e^{2n} x(n) = 0$, $x(0) = c$.
4. $x(n+1) - \frac{n}{n+1} x(n) = 0$, $n \geq 1$, $x(1) = c$.

Příklad 9.6 Nalezněte obecné řešení následujících úloh (nehomogenní případ):

1. $y(n+1) - \frac{1}{2} y(n) = 2$, $y(0) = c$.
2. $y(n+1) - \frac{n}{n+1} y(n) = 4$, $y(0) = c$.

10 Lineární diferenční rovnice druhého řádu

Po prostudování této kapitoly budete schopni nalézt obecné řešení homogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu, ovšem jen pro určitý typ těchto rovnic (s konstantními koeficienty), ne obecně.

Hledání obecného řešení homogenní lineární rovnice je poměrně přehledné, takže by vám nemělo činit větší potíže.

V této kapitole se budeme věnovat lineárním diferenčním rovnicím druhého řádu s jednou nezávisle proměnnou. Využití takovýchto rovnic je velmi široké, od populačních dynamik (studium jednoho druhu), přes ekonomii (studium jedné komodity) až k fyzice.

10.1 Diferenční počet

Diferenční počet je diskrétní analogii známého diferenciálního a integrálního počtu. Při studiu diferenčních rovnic jsou důležité dva operátory, které přetvářejí posloupnosti.

Diferenční operátor $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

Ukažme si, jak pracuje. Mějme posloupnost $x(n) = 1 + 2n$, $n \geq 0$, potom

$$y(n) = \Delta x(n) = x(n+1) - x(n) = [1 + 2(n+1)] - [1 + 2n] = 2, \quad n \geq 0.$$

Výsledkem aplikace operátoru Δ na posloupnost $(1+2n)_{n=0}^{\infty}$ je konstantní posloupnost $(2)_{n=0}^{\infty}$.

Když budeme aplikovat diferenční operátor ještě jednou, dostaneme,

$$z(n) = \Delta^2 x(n) = \Delta\left(\Delta x(n)\right) = \Delta(2) = [2] - [2] = 0, \quad n \geq 0,$$

tedy nulovou posloupnost.

Dá se tak nahlédnout, že aplikace diferenčního operátoru na polynom v diskrétní proměnné $n \in \mathbb{N}_0$) se podobá derivování polynomu v proměnné $x \in \mathbb{R}$.

Operátor posunu $\mathrm{E}\,x(n) = x(n+1)$

Jak rozumět operátoru posunu? Budeme jej aplikovat na posloupnost $x(n) = n$, $n \geq 0$:

$$\mathrm{E}\,x(n) = \mathrm{E}\,n = n+1, \quad n \geq 0.$$

Co se tedy stalo? Z posloupnosti $(n)_{n=0}^{\infty}$ jsme dostali aplikací operátoru posunu posloupnost $(n+1)_{n=0}^{\infty}$, tedy z $1, 2, 3, 4, \ldots$ máme $2, 3, 4, 5, \ldots$. To se dá popsat i tak, že jsme původní posloupnosti „odstřihli“ první prvek.

Podobně
$$\mathrm{E}^k x(n) = x(n+k), \quad n \geq 0,$$
tedy dostáváme posloupnost $k+1, k+2, k+3, \ldots$.

Oba operátory, Δ i E, jsou lineární. To znamená, že
$$\Delta\big[ax(n) + by(n)\big] = a\Delta x(n) + b\Delta y(n)$$
a
$$\mathrm{E}\big[ax(n) + by(n)\big] = a\,\mathrm{E}\,x(n) + b\,\mathrm{E}\,y(n),$$
pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

10.2 Obecná teorie lineárních diferenčních rovnic druhého řádu

Normální tvar *nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu* je následující:
$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = g(n), \tag{10.1}$$
kde $p_1(n)$, $p_2(n) \neq 0$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0$.

Pro $g(n) \equiv 0$ dostaneme příslušnou homogenní rovnici:
$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = 0, \qquad n \geq n_0. \tag{10.2}$$

Zkusme si teď z (10.1) vyjádřit $y(n+2)$:
$$y(n+2) = -p_1(n)y(n+1) - p_2(n)y(n) + g(n). \tag{10.3}$$
Odtud, pro $n = 0$, dostáváme
$$y(2) = -p_1(0)y(1) - p_2(0)y(0) + g(0).$$
Takto, při znalosti $p_1(n)$, $p_2(n)$, $g(n)$ a počátečních hodnot $y(0)$ a $y(1)$, můžeme vypočíst $y(2)$ a pro $n = 1$ $y(3)$:
$$y(2+1) = -p_1(1)y(2) - p_2(1)y(1) + g(1).$$
Opakováním tohoto postupu můžeme vypočíst všechna $y(n)$ pro $n \geq 2$, a tak získat posloupnost, která vyhovuje rovnici (10.1).

Toto dále ilustruje následující příklad.

Příklad 10.1 Uvažujme diferenční rovnici druhého řádu
$$y(n+2) - ny(n+1) + 2y(n) = n^2, \qquad n \geq 0, \tag{10.4}$$
kde $y(0) = 1$ a $y(1) = 0$. Vypočítejme hodnoty $y(2)$, $y(3)$ a $y(4)$.

Řešení. Rovnici přepíšeme do naznačeného tvaru

$$y(n+2) = ny(n+1) - 2y(n) + n^2. \tag{10.5}$$

Nyní pro $n = 0$ a po dosazení za $y(0)$ a $y(1)$ dostáváme

$$y(2) = 0 \cdot y(1) - 2y(0) + 0^2 = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 0 = -2.$$

Podobně pro $n = 1$

$$y(3) = 1 \cdot y(2) - 2 \cdot y(1) + 1^2 = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 + 1 = -1.$$

Pro $n = 2$

$$y(4) = 2 \cdot y(3) - 2y(2) + 2^2 = 2 \cdot (-1) - 2(-2) + 4 = 6.$$

□

Řekneme, že posloupnost $(y(n))_{n=0}^{\infty}$ nebo jednoduše $y(n)$ je *řešením* (10.1), jestliže tuto rovnici splňuje (pro všechna $n \geq n_0$).

Příslušná počáteční úloha je tvořena diferenční rovnicí druhého řádu a dvěma počátečními podmínkami:

$$\begin{cases} y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = g(n), \\ y(n_0) = a_0, \;\; y(n_0+1) = a_1, \end{cases} \tag{10.6}$$

kde a_1, a_2 jsou reálná čísla.

Věta 10.1 ([2]) *Počáteční úloha (10.6) má právě jedno řešení $y(n)$.*

Důkaz. Důkaz vychází z postupného výpočtu jako v příkladu 10.1.

Postupně pro $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$ dostaneme posloupnost $(y(n))_{n=n_0+k}^{\infty}$, což nám ve spojení s počátečními podmínkami z (10.6) dává celé řešení $(y(n))_{n=n_0}^{\infty}$. Z postupu vyplývá i jednoznačnost. □

Iterativně tedy řešení počáteční úlohy můžeme získat vždy, se ziskem explicitního tvaru řešení (např. $y(n) = 2ny(n_0)$) je to obecně mnohem složitější. Proto se později omezíme na úlohy s konstantními koeficienty p_i.

V dalším podrobně prostudujeme homogenní část lineární diferenční rovnice druhého řádu, tedy

$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = 0. \tag{10.7}$$

Uvedeme tři důležité definice.

Definice 10.1 ([2]) Řekneme, že funkce $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_r(n)$ jsou *lineárně závislé* pro $n \geq n_0$, jestliže existují konstanty $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ne všechny nulové a takové, že

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0, \quad n \geq n_0.$$

Jestliže například $a_j \neq 0$, potom vydělením předchozí rovnosti zjistíme, že $f_j(x)$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních funkcí,

$$f_j(n) = -\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} f_i(n). \tag{10.8}$$

Pro dvojici funkcí ($r = 2$) to znamená, že jedna je násobkem druhé,

$$f_1(n) = a f_2(n), \quad a \neq 0.$$

Opakem lineární závislosti je *lineární nezávislost*:

$$\big(a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0,\ n \geq n_0\big) \Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0.$$

Příklad 10.2 ([2]) Ukažte, že funkce 3^n, $n3^n$, a $n^2 3^n$ jsou lineárně nezávislé pro $n \geq 0$.

Řešení. Je tedy třeba zjistit, zda rovnice (ve skutečnosti jde soustavu nekonečně mnoha rovnic, neboť pro každé $n \geq 0$ dostaneme jednu)

$$a_1 3^n + a_2 n 3^n + a_3 n^2 3^n = 0, \quad n \geq 0$$

má pouze triviální řešení $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Rovnici můžeme dělit (vždy nenulovým) výrazem 3^n. Tím získáme (kvadratickou) rovnici

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 = 0, \quad n \geq 0.$$

Polynom na levé straně je identicky roven nule jen v případě nulovosti všech svých koeficientů, tedy

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

a tak jsou funkce 3^n, $n3^n$, a $n^2 3^n$, podle definice, lineárně nezávislé. □

Definice 10.2 ([2]) Množinu dvou lineárně nezávislých řešení (10.7) nazýváme *fundamentální množina* řešení.

V předchozím příkladu 10.2 jsme si mohli uvědomit, že ověření lineární nezávislosti jen podle definice nemusí být vždy snadné. Naštěstí existuje jednodušší metoda založená na tzv. casoratiánu[10]:

[10] Diskrétní obdoba wronskiánu u diferenciálních rovnic.

Definice 10.3 ([2]) Casoratián $W(n)$ řešení $x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$ je dán předpisem

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_r(n+1) \\ \vdots & & & \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \cdots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}. \tag{10.9}$$

Příklad 10.3 ([2]) Uvažujme diferenční rovnici

$$x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 0.$$

Ukážeme, že posloupnosti $x_1(n) \equiv 1$ a $x_2 = 2^n$, $n \geq 0$, jsou její řešení a určíme jejich casoratián.

Řešení. Stačí dosadit. Nejprve $x_1(n)$:

$$L = x_1(n+2) - 3x_1(n+1) + 2x_1(n) = 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0, \quad n \geq 0,$$

a tak je $x_1(n) \equiv 1$ skutečně řešením naší rovnice pro $n \geq 0$. Ke stejnému závěru dojdeme i pro $x_2(n)$:

$$L = x_2(n+2) - 3x_2(n+1) + 2x_2(n) = 2^{n+2} - 3 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 2^n =$$

$$= 2^n(4 - 3 \cdot 2 + 2) = 0, \quad n \geq 0.$$

Casoratián funkcí $x_1(n)$ a $x_2(n)$:

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = 2^{n+1} - 2^n = 2^n, \quad n \geq 0.$$

$\square$

Dá se ukázat, že množina dvou řešení je fundamentální (tj. lineárně nezávislá), jestliže její casoratián $W(n)$ není nikdy nulový ($n \geq n_0$).

To znamená, že v předchozím příkladu, kde $W(n) = 2^n$, o fundamentální množinu jde, neboť pro $n \geq 0$ je $2^n \neq 0$.

Obecně ale nemusí být snadné vypočíst a vyhodnotit casoratián pro každé $n \geq n_0$. Naštěstí máme k dispozici následující větu.

Věta 10.2 ([2]) *Množina řešení $x_1(n), x_2(n)$ rovnice (10.7) je fundamentální tehdy a jen tehdy, když pro nějaké $n_0 \geq 0$ platí $W(n_0) \neq 0$.*

Příklad 10.4 ([2]) Ověříme, že $\{n, 2^n\}$ je fundamentální množinou řešení rovnice

$$x(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}x(n+1) + \frac{2n}{n-1}x(n) = 0, \quad n \geq 2.$$

Řešení. Nejprve je samozřejmě třeba dosadit ověřovaná řešení do uvažované rovnice.

Casoratián:

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Podle věty 10.2 stačí nalézt jednu hodnotu n_0, pro kterou $W(n_0) \neq 0$. Nejjednodušší bude vzít $n_0 = 2$, a tedy

$$W(2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2^2 \\ 3 & 2^3 \end{pmatrix} = 16 - 12 = 4 \neq 0.$$

Podle věty 10.2 jsou řešení $n, 2^n$ lineárně nezávislá, a tak tvoří fundamentální množinu řešení. □

Věta 10.3 (O existenci fundamentální množiny řešení homogenní úlohy,[2]) *Jestliže $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$, potom (10.7) má fundamentální množinu řešení pro $n \geq n_0$.*

Při znalosti fundamentální množiny řešení již můžeme přejít k vyjádření obecnému řešení.

Definice 10.4 (Obecné řešení homogenní úlohy,[2]) Nechť

$$\{x_1(n), x_2(n)\}$$

je fundamentální množina řešení (10.7).

Potom *obecné řešení* (10.7) je dáno vztahem

$$x(n) = C_1 x_1(n) + C_2 x_2(n), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Každé řešení (10.7) lze získat z obecného řešení vhodnou volbou parametrů a_i.

[2]

Příklad 10.5 Najděte casoratián následujících funkcí a zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

1. $5^n, 3 \cdot 5^{n+2}$.
2. $5^n, n \cdot 5^n$.
3. $(-2)^n, 2^n$.
4. $0, 3^n$.

Příklad 10.6 Pro diferenční rovnici $x(n+2)+x(n) = 0$ a její řešení $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ a $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

(i) určete, zda jsou řešení lineárně nezávislá a

(ii) nalezněte, pokud to půjde, obecná řešení.

10.3 Lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

Uvažujeme diferenční rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty:

$$x(n+2) + p_1 x(n+1) + p_2 x(n) = 0, \tag{10.10}$$

kde p_1 a p_2 jsou konstanty, přičemž $p_2 \neq 0$. Chceme pro ni nalézt fundamentální množinu řešení a potažmo i obecné řešení.

Postup bude poměrně jednoduchý. Budeme předpokládat, že řešení (10.10) mají tvar λ^n, kde λ je komplexní číslo. Dosadíme do (10.10) a dostaneme tzv. *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0. \tag{10.11}$$

Její dva kořeny $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ nazýváme *charakteristické kořeny*. Poznamenejme, že žádný z nich není nulový, neboť $p_2 \neq 0$.

Určení fundamentální množiny řešení a obecného řešení rovnice (10.10) pomocí charakteristických kořenů (10.11)

Mohou nastat tři základní případy:

(a) *Charakteristické kořeny λ_1, λ_2 jsou reálné a různé.* Dokážeme, že v tomto případě funkce λ_1^n a λ_2^n tvoří fundamentální množinu řešení (10.10). Z konstrukce plyne, že jde o řešení. Zbývá tedy ukázat, že jsou lineárně nezávislá. K tomu postačí ukázat, že $W(0) \neq 0$:

$$W(0) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0, \tag{10.12}$$

neboť $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Tím je dokázáno, že $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ fundamentální množinou řešení (10.10), a tak obecné řešení (10.10) má tvar

$$x(n) = C_1\lambda_1^n + C_1\lambda_1^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{10.13}$$

(b) *Násobné reálné charakteristické kořeny* $\lambda_1 = \lambda_2$ (jako zástupce vezmeme λ_1). Pro tento případ ukážeme, že fundamentální množinu řešení (10.10) tvoří dvojice funkcí $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\}$.

- *Řešení*: To, že je λ_1^n řešením (10.10) vyplývá z jeho konstrukce, pro $n\lambda_1^n$ to musíme ukázat dosazením do (10.10) a úpravou:

$$L = (n+2)\lambda_1^2 + p_1(n+1)\lambda_1^{n+1} + p_2\lambda_1^n =$$
$$= \lambda_1^n\Big[n(\lambda_1^2 + p_1\lambda_1 + p_2) + (2\lambda_1^2 + p_1\lambda_1)\Big] = 0 = P,$$

  neboť rovnost $(\lambda_1^2+p_1\lambda_1+p_2) = 0$ dostaneme z charakteristické rovnice (10.11), protože λ_1 je kořenem této rovnice, a rovnost $(2\lambda_1^2+p_1\lambda_1) = 0$ plyne z obecné rovnosti pro koeficient p_1 kvadratické rovnice (10.11) $p_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, zde pro $\lambda_1 = \lambda_2$ máme $p_1 = -2\lambda_1$.
- *Lineární nezávislost řešení*:

$$W(0) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \neq 0.$$

Podmínky jsou splněny, a tak je $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\}$ fundamentální množinou řešení (10.10). Obecné řešení (10.10) má tedy v tomto případě tvar

$$x(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n = (C_1 + C_2 n)\lambda_1^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- *Komplexní charakteristické kořeny*

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Její obecné řešení by tedy mělo tvar

$$x(n) = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n.$$

Zopakujme si, že bod (α, β) v komplexní rovině odpovídá komplexnímu bodu $\alpha + i\beta$. V polárních souřadnicích:

$$\alpha = r\cos\theta, \quad \beta = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Dá se ukázat, že

$$x_1(n) = r^n\cos(n\theta) \quad \text{a} \quad x_2(n) = r^n\sin(n\theta)$$

jsou dvě lineárně nezávislá řešení.

Fundamentální množinou řešení (10.10) je tedy $\{r^n\cos(n\theta), r^n\sin(n\theta)\}$, kde parametry r a θ jsou odvozeny výše.

Obecné řešení je v tomto případě tvaru

$$x(n) = C_1 r^n\cos(n\theta) + C_2 r^n\sin(n\theta) = r^n\Big(C_1\cos(n\theta) + C_2\sin(n\theta)\Big), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Poslední případ dvou komplexně sdružených charakteristických kořenů jsme provedli bez obecného důkazu. V následujícím příkladu si jej provedeme alespoň pro jednu konkrétní rovnici (10.14).

Příklad 10.7 Rovnice

$$x(n+2) + x(n) = 0 \tag{10.14}$$

má dva komplexně sdružené charakteristické kořeny

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i.$$

Tudíž

$$\alpha = 0, \beta = \pm 1, r = 1, \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$

a tedy budeme ověřovat, že

$$x_1(n) = 1^n \cos(n\frac{\pi}{2}) \quad \text{a} \quad x_2(n) = 1^n \sin(n\frac{\pi}{2})$$

jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (10.14).

– *Řešení rovnice (10.14):*

$$L = x_1(n+2)+x_1(n) = \cos\big((n+2)\frac{\pi}{2}\big)+\cos(n\frac{\pi}{2}) = \cos\big(n\frac{\pi}{2}+\pi\big)+\cos(n\frac{\pi}{2}) =$$

$$= -\cos(n\frac{\pi}{2}) + \cos(n\frac{\pi}{2}) = 0 = P.$$

Obdobně i pro $x_2(n) = \sin(n\frac{\pi}{2})$.

– *Lineární nezávislost řešení:*

$$W(0) = \det\begin{pmatrix} \cos(n\frac{\pi}{2}) & \sin(n\frac{\pi}{2}) \\ \cos((n+1)\frac{\pi}{2}) & \sin((n+1)\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \cdots = 1 \neq 0.$$

Máme tedy fundamentální množinu řešení rovnice (10.14)

$$\Big\{1^n \cos(n\frac{\pi}{2}), 1^n \sin(n\frac{\pi}{2})\Big\} = \Big\{\cos(n\frac{\pi}{2}), \sin(n\frac{\pi}{2})\Big\}$$

a obecné řešení rovnice (10.14)

$$x(n) = C_1 \cos(n\frac{\pi}{2}) + C_2 \sin(n\frac{\pi}{2}), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Příklad 10.8 (Fibonacciho posloupnost (Králičí problém)) Králíci se množí, každý pár vrhne na konci každého měsíce (kromě prvního) svého života další pár. Množství párů králíků na konci n-tého měsíce označíme $F(n)$. Rozdělme si tyto páry na nedospělé (na konci následujícího měsíce ještě nevrhnou, ale stanou se dospělými) a dospělé:

$$F(n) = F_0(n) + F_1(n).$$

Na konci následujícího měsíce tedy $F_1(n)$ párů vrhne další pár a $F_0(n)$ párů dospěje (žádný králík neumírá ani neztrácí plodnost), což můžeme zapsat následovně:

$$\begin{aligned} F_0(n+1) &= F_1(n), \\ F_1(n+1) &= F_1(n) + F_0(n) = F(n), \\ F(n+1) &= F_0(n+1) + F_1(n+1) = F_1(n) + F(n). \end{aligned}$$

Podobně i v následujícím měsíci:

$$\begin{aligned} F_0(n+2) &= F_1(n+1) = F(n), \\ F_1(n+2) &= F_1(n+1) + F_0(n+1) = F(n+1), \\ F(n+2) &= F_0(n+2) + F_1(n+2) = F(n) + F(n+1). \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy (Fibonacciho) diferenční rovnici druhého řádu

$$F(n+2) = F(n) + F(n+1).$$

Její charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

má dva kořeny

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{a} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Obecné řešení:

$$F(n) = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Uvažujme množení od jediného páru, který je sám vržen na konci prvního měsíce. Tomu odpovídají počáteční hodnoty $F(1) = 1$ a $F(2) = 1$. Po dosazení dostaneme

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Následně:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^n - \beta^n\right). \tag{10.15}$$

Zajímavé je, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \equiv 1,618,$$

což je tzv. *zlatý poměr*. □

Příklad 10.9 Pro následující rovnice najděte obecné řešení.

1. $x(n+2) - 16x(n) = 0$.
2. $x(n+2) + 16x(n) = 0$.
3. $x(n+2) - 6x(n+1) + 14x(n) = 0$.

10.4 Lineární nehomogenní rovnice druhého řádu

Po prostudování této kapitoly budete schopni nalézt (metodou neurčitých koeficientů) obecné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu, ovšem jen pro určité typy těchto rovnic (s konstantními koeficienty a se speciální pravou stranou), ne obecně.

Při hledání obecného řešení nehomogenní rovnice využijete již známé postupy při hledání obecného řešení příslušné homogenní úlohy.

V posledních dvou oddílech jsme se věnovali teorii lineárních homogenních diferenčních rovnic. V případě rovnic s konstantními koeficienty umíme najít jejich obecné řešení. Zde se vrátíme k nehomogenním lineárním diferenčním rovnicím druhého řádu,

$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = g(n), \tag{10.16}$$

kde $p_1(n)$, $p_2(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0$ a $p_2(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$.

Na tuto rovnici můžeme pohlížet tak, že levá strana popisuje nějaký fyzikální systém a $g(n)$ se bere jako vnější činitel, přičemž studujeme, jakým způsobem $y(n)$ (výstup) reaguje na $g(n)$ (vstup).

Než přejdeme k obecným výsledkům, položme si otázku, zda množina řešení nehomogenní úlohy (10.16) tvoří vektorový prostor. Jinými slovy, je lineární kombinace dvou řešení lineární nehomogenní rovnice opět řešením? (U lineárních homogenních rovnic tomu tak bylo.)

Pokusíme se odpovědět pomocí následující úvahy.

Přepišme levou stranu rovnice (10.16) pomocí (lineárního) operátoru

$$L(y) = y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n)$$

na

$$L(y) = g(n).$$

Nechť $y_1(n)$ a $y_2(n)$ jsou dvě řešení rovnice (10.16), což lze zapsat $L(y_1) = g(n)$ a $L(y_2) = g(n)$.

Nyní budeme uvažovat lineární kombinaci řešení y_1 a y_2:

$$\tilde{y}(n) = ay_1(n) + by_2(n), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení do L dostaneme (z linearity L):

$$L(\tilde{y}) = L(ay_1 + by_2) = aL(y_1) + bL(y_2) = ag(n) + bg(n) = (a + b)g(n),$$

takže lineární kombinace dvou řešení (10.16) není obecně opět řešením (10.16), neboť $(a + b)g(n) = g(n)$ pouze ve speciálních případech. Prostor řešení rovnice (10.16) tedy není vektorovým prostorem.

Podobně můžeme zvažovat rozdíl dvou řešení rovnice (10.16). O tom hovoří následující věta.

Věta 10.4 *Jestliže $y_1(n)$ a $y_2(n)$ jsou řešeními nehomogenní úlohy (10.16), potom jejich rozdíl, $x(n) = y_1(n) - y_2(n)$, je řešením odpovídající homogenní úlohy*

$$y(n + 2) + p_1(n)y(n + 1) + \cdots + p_2(n)y(n) = 0. \tag{10.17}$$

Důkaz. Proveďte sami. □

V dalším budeme používat následující označení. Obecné řešení homogenní úlohy budeme značit $\overline{y}(n)$, zatímco partikulární řešení nehomogenní úlohy budeme značit $Y(n)$. Následující výsledek ukazuje, jakým způsobem můžeme najít všechna řešení nehomogenní úlohy při znalosti jednoho partikulárního řešení.

Věta 10.5 *Libovolné řešení $y(n)$ nehomogenní úlohy (10.16) lze zapsat jako*

$$y(n) = Y(n) + C_1x_1(n) + C_2x_2(n),$$

kde $\{x_1(n), x_2(n)\}$ je fundamentální množina řešení homogenní úlohy (10.17) a $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Z věty 10.4 víme, že rozdíl dvou partikulárních řešení je řešením homogenní úlohy, a tedy musí platit, že

$$y(n) - Y(n) = C_1x_1(n) + C_2x_2(n),$$

pro nějaké konstanty $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

Nyní tedy víme, že obecné řešení nehomogenní úlohy lze zapsat jako

$$y(n) = Y(n) + \overline{y}(n). \tag{10.18}$$

10.5 Lineární nehomogenní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty — metoda neurčitých koeficientů

Nyní obrátíme pozornost na hledání partikulárního řešení nehomogenní úlohy s konstantními koeficienty,

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = g(n).$$

Použijeme metodu *neurčitých koeficientů.* Tato metoda je postavena na inteligentním odhadu tvaru partikulárního řešení. Tento (trochu neurčitý) tvar dosadíme do rovnice a dohledáme (zatím neurčité) koeficienty. Pro úplně obecné $g(n)$ tato metoda není efektivní, ale ukážeme, že lze definovat pravidla postupu ve speciálním případě, kdy $g(n)$ je lineární kombinací členů tvaru

$$g_1(n) = p(n)\lambda^n, \qquad g_2(n) = p(n)r^n \cos(n\theta), \qquad g_3(n) = p(n)r^n \sin(n\theta),$$

kde p je polynom v proměnné n (například $p(n) = 2n^3 + 6n - 1$) a $\lambda, r, \theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0$ (pozor, pro $\lambda = 1$ dostáváme „čistý“ polynom $p(n)$).

Když se naučíme řešit příslušnou rovnici pro každou pravou stranu g_1, g_2 a g_3 zvlášť, tedy (při označení $L(y) = y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n)$) rovnice

$$L(y) = g_1(n), \quad L(y) = g_2(n), \quad L(y) = g_3(n),$$

budeme schopni vyřešit i nehomogenní rovnici, která má na pravé straně lineární kombinaci pravých stran g_1, g_2 a g_3,

$$L(y) = ag_1(n) + bg_2(n) + cg_3(n), \quad \text{(kde } a, b, c \text{ jsou reálné koeficienty).}$$

Ukažme to. Když vyjdeme z řešení y_1, y_2 a y_3 dílčích úloh, tedy

$$L(y_1) = g_1(n), \quad L(y_2) = g_2(n), \quad L(y_3) = g_3(n),$$

dostaneme z linearity operátoru L

$$L(ay_1 + by_2 + cy_3) = aL(y_1) + bL(y_2) + cL(y_3) = ag_1(n) + bg_2(n) + cg_3(n),$$

a tak je $y = ay_1 + by_2 + cy_3$ řešením rovnice $L(y) = ag_1(n) + bg_2(n) + cg_3(n)$.

Jistě jste si všimli, že (až na násobení polynomem) „povolenými“ pravými stranami jsou funkce, které se objevují jako řešení homogenní úlohy s konstantními koeficienty:

- λ^n pro reálný charakteristický kořen λ,
- $r^n \cos(n\theta)$ a $r^n \sin(n\theta)$ pro komplexní charakteristický kořen $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, přičemž $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ a $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Jak uvidíme, mohlo by tak dojít ke „konfliktu“ při volbě (neurčitého tvaru) partikulárního řešení Y, neboť to volíme velmi příbuzné příslušné pravé straně. Budeme tomu čelit násobením vhodnou mocninou n^N (N jako násobnost).

Bude nás tedy zajímat vztah mezi λ z pravé strany a charakteristickými kořeny příslušné homogenní úlohy. Tento vztah zaznamenáme pomocí veličiny N, která v našem případě může nabývat hodnoty

$$N = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \lambda \text{ není charakteristickým kořenem,} \\ 1, & \text{pokud } \lambda \text{ je jednoduchým charakteristickým kořenem,} \\ 2, & \text{pokud } \lambda \text{ je dvojnásobným charakteristickým kořenem.} \end{cases}$$

(Obecně, u rovnic n-tého řádu, může být $N = k$, $k \leq n$, když je λ k-násobným charakteristickým kořenem.)

Při tomto nastavení můžeme vyslovit následující větu o volbě partikulárního řešení.

Věta 10.6 *Nechť p je polynom v proměnné n stupně $s \geq 0$, nechť*

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = g(n) \tag{10.19}$$

je rovnice s konstantními koeficienty a nechť N je výše definovaná veličina vztažená k této rovnici (10.19).

Pak platí:

a) Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ a $g(n) = p(n)\lambda^n$,

potom existuje polynom q stupně nejvýše s tak, že funkce

$$Y(n) := n^N q(n) \lambda^n$$

je partikulárním řešením rovnice (10.19).

b) Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, a je-li $g(n) = p(n) r^n \cos(n\theta)$ nebo $g(n) = p(n) r^n \sin(n\theta)$ (kde $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ a $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$),

potom existují polynomy q_1 a q_2 stupně nejvýše s takové, že funkce

$$Y(n) := n^N r^n \big(q_1(n)\cos(n\theta) + q_2(n)\sin(n\theta)\big)$$

je partikulárním řešením rovnice (10.19).

Můžeme se zorientovat podle následujících příkladů.

Příklad 10.10 Řešte diferenční rovnici

$$y(n+2) + y(n+1) - 12y(n) = n2^n. \tag{10.20}$$

Řešení. Charakteristické kořeny homogenní rovnice jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -4$, a tedy obecné řešení homogenní úlohy je

$$\overline{y}(n) = C_1 3^n + C_2(-4)^n, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pravá strana, $g(n) = n2^n = p(n)\lambda^n$, kde polynom $p(n) = n$ je stupně $s = 1$ a $\lambda = 2$, tedy nepatří mezi charakteristické kořeny 3 a -4, tudíž $N = 0$.

Podle věty 10.6 tedy volíme za neurčitý tvar partikulárního řešení rovnice (10.10)

$$Y(n) = n^N q(n)\lambda^n = n^0(An + B)2^n = An2^n + B2^n.$$

Po dosazení do (10.20) dostaneme

$$\begin{aligned} A(n+2)2^{n+2} + B2^{n+2} + A(n+1)2^{n+1} + B2^{n+1} - 12An2^n - 12B2^n &= n2^n, \\ (10A - 6B)2^n - 6An2^n &= n2^n. \end{aligned}$$

Tudíž

$$10A - 6B = 0, \quad \text{a} \quad 6A = 1,$$

tedy

$$B = \frac{-5}{18}, \quad A = \frac{-1}{6}.$$

Partikulární řešení

$$Y(n) = \frac{-5}{18}2^n - \frac{1}{6}n2^n,$$

a obecné řešení

$$y(n) = Y(n) + \overline{y}(n) = -\frac{1}{6}n2^n + \frac{-5}{18}2^n + C_1 3^n + C_2(-4)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Příklad 10.11 Řešte diferenční rovnici

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 5 \cdot 3^n. \tag{10.21}$$

Řešení. Obecné řešení příslušné homogenní rovnice $y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 0$ má pro charakteristické kořeny

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2,$$

tvar

$$\overline{y}(n) = C_1 3^n + C_2(-2)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Z pravé strany $g(n) = p(n)\lambda^n = 5 \cdot 3^n$ máme polynom $p(n) \equiv 5$ stupně $s = 0$ a $\lambda = 3 = \lambda_1$, tedy $N = 1$.

Podle věty 10.6 tedy volíme za neurčitý tvar partikulárního řešení rovnice (10.11)

$$Y(n) = n^N q(n)\lambda^n = n^1(A)3^n = nA3^n = An3^n.$$

Po dosazení do (10.21) dostaneme

$$A(n+2)3^{n+2} - A(n+1)3^{n+1} + 6An3^n = 5 \cdot 3^n,$$

a tedy

$$A = \frac{1}{3},$$

čímž $Y(n) = n3^{n-1}$ a obecné řešení (10.21) je

$$y(n) = Y(n) + \overline{y}(n) = n3^{n-1} + c_1 3^n + c_2(-2)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Příklad 10.12 Řešte diferenční rovnici

$$y(n+2) + 4y(n) = 8(2^n)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{10.22}$$

Řešení. Charakteristická rovnice a kořeny homogenní úlohy:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i.$$

Po převodu na polární souřadnice, $r = 2$, $\theta = \pi/2$, dostaneme

$$\overline{y}(n) = 2^n\left(C_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + C_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Z pravé strany $g(n) = p(n)r^n\cos(n\theta) = 8(2^n)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ máme polynom $p(n) \equiv 8$ stupně $s = 0$ a $r = 2$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$, což odpovídá tomu, co máme u příslušné homogenní rovnice, a tak $N = 1$.

Podle věty 10.6 tedy volíme za neurčitý tvar partikulárního řešení rovnice (10.22)

$$Y(n) = n^N r^n\big(q_1(n)\cos(n\theta) + q_2(n)\sin(n\theta)\big) = n^1 2^n\big(A\cos(n\frac{\pi}{2}) + B\sin(n\frac{\pi}{2})\big). \tag{10.23}$$

Dosadíme jej do (10.22) a dostaneme

$$2^{n+2}\left[A(n+2)\cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + B(n+2)\sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right)\right]$$

$$+4 \cdot 2^n\left[An\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Bn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = 8 \cdot 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Odtud, s úpravami $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ a $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
4 \cdot 2^n &\left[-A(n+2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - B(n+2)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\
+4 \cdot 2^n &\left[An\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Bn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = 8 \cdot 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),
\end{aligned}
$$

což vede k

$$
8 \cdot 2^n \left[-A\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - B\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = 8 \cdot 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),
$$

a tedy porovnáním koeficientů u cos a sin zjistíme, že $A = -1$ a $B = 0$. Dosadíme zpět do (10.23):

$$
Y(n) = -2^n n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).
$$

Celkové obecné řešení nehomogenní úlohy (10.22):

$$
y(n) = 2^n\left(C_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + C_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
$$

□

Příklad 10.13 Pro následující úlohy nalezněte partikulární řešení.

1. $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 1 + n$.
2. $y(n+2) + 8y(n+1) + 12y(n) = e^n$.
3. $y(n+2) - 5y(n+1) + 4y(n) = 4^n - n^2$.
4. $y(n+2) + 8y(n+1) + 7y(n) = ne^n$.
5. $y(n+2) - y(n) = n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Příklad 10.14 Pro následující rovnice najděte obecné řešení.

1. $y(n+2) - y(n) = n2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
2. $y(n+2) + 8y(n+1) + 7y(n) = n2^n$.

Literatura

[1] J. Diblík, M. Růžičková: *Obyčajné diferenciálne rovnice.* EDIS-vydavatelství ŽU, Žilina, 2008.

[2] S. N. Elaydi: *An Introduction to Difference Equations.* Springer, New York, 1999.

[3] M. Greguš, M. Švec, V. Šeda: *Obyčajné diferenciálne rovnice.* Alfa, Bratislava, SNTL, Praha, 1985.

[4] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU Brno, PřF, 2001.

[5] J. Kopáček: *Matematická analýza nejen pro fyziky II.* Matfyzpress, Praha, 2007.

[6] P. Kreml a kol.: *Matematika II.* VŠB-TU Ostrava, [online], dostupné z: `http://www.studopory.vsb.cz/materialy.html`, [citováno 15. 10. 2012].

[7] J. Kuben: *Obyčejné diferenciální rovnice.* VA Brno, 2000.

[8] J. Nagy: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* MVŠT IX, SNTL, Praha, 1978.

RNDr. Jiří Fišer, Ph.D.

Úvod do teorie obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic

Určeno pro studenty katedry MAaAM

Výkonný redaktor prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.
Odpovědná redaktorka Mgr. Jana Kreiselová
Technická redakce autor
Návrh obálky Jiří Jurečka
Fotografie na obálce Viktor Čáp

Tato publikace neprošla redakční jazykovou úpravou.

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
www.vydavatelstvi.upol.cz
e-mail: vup@upol.cz

Publikace z produkce UP je možno zakoupit prostřednictvím e-shopu
na adrese www.e-shop.upol.cz

Olomouc 2013

1. vydání

Ediční řada – Skripta
čz 2013/047

ISBN 978-80-244-3401-8

Neprodejné