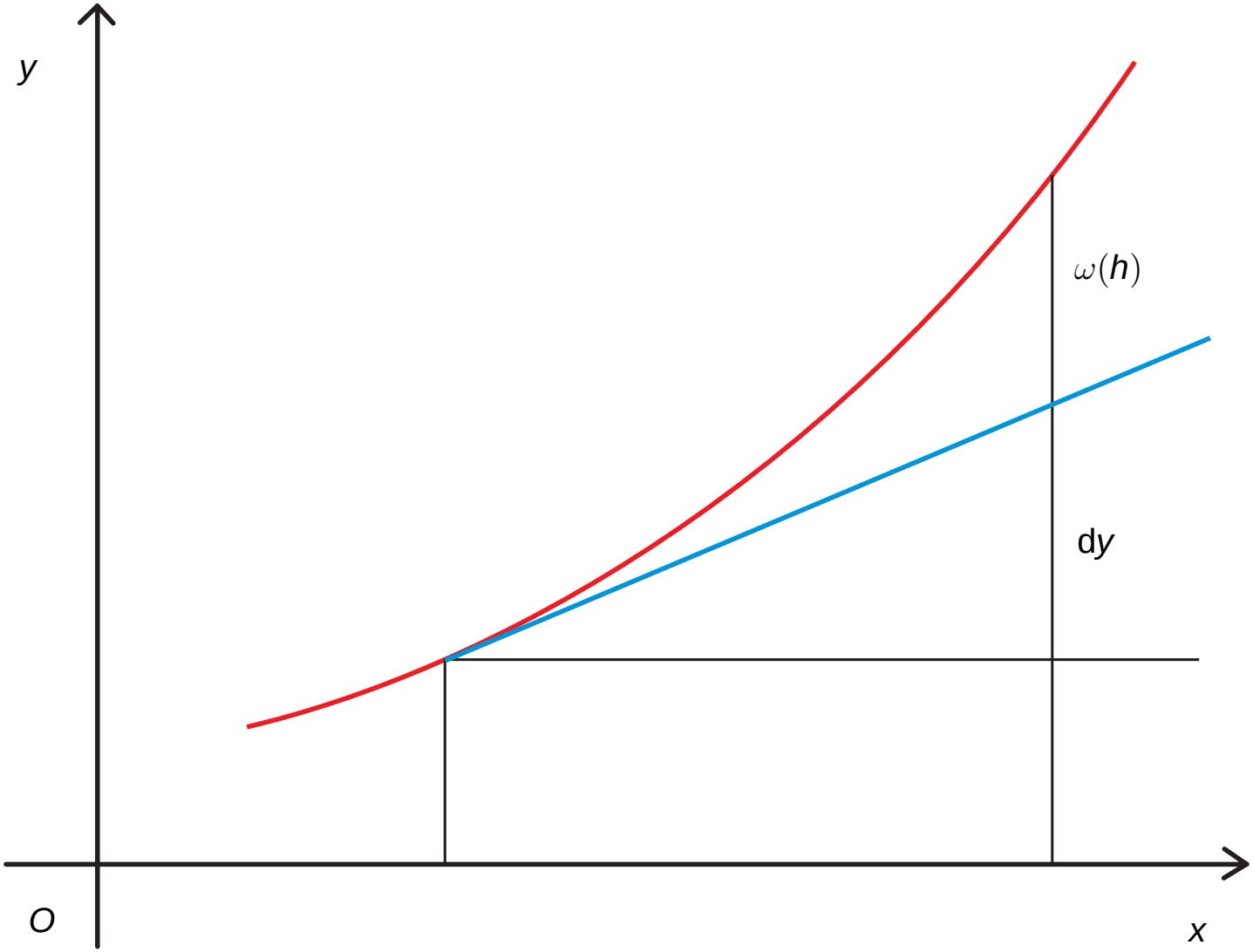
Diferenciál funkce
Derivace vyšších řádů
L'Hospitalovo pravidlo

Jiří Fišer

22. a 23. března 2011



Obrázek: Geometrický význam diferenciálu funkce.

Definice

Diferenciálem funkce *f* ***v bodě*** x_0 *nazýváme výraz*

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x,$$

kde $\mathrm{d}x (= \Delta x)$ *je konstantní přírůstek (diferenciál) nezávisle proměnné.*
Diferenciálem funkce *f* ***na množině*** *M nazýváme funkci*

$$\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x,$$

kde $x \in M$.

- Ze vztahu $\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$ vidíme,
- že Leibnizův symbol $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pro derivaci funkce
- je skutečným zlomkem — podílem diferenciálu funkce a diferenciálu nezávisle proměnné.
- Také vzorce pro derivaci složené funkce a inverzní funkce lze chápat jako operace se skutečnými zlomky.

Užití diferenciálu

Užití diferenciálu *v přibližných výpočtech* je založeno na přibližné rovnosti

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + \mathrm{d}y = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Úloha

Pomocí diferenciálu funkce vypočtěte přibližnou hodnotu $\sqrt{0,982}$.

Řešení.

$$\sqrt{0,982} = f(0,982) = f(1-0,018) = f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

$$\sqrt{0,982} \approx f(1) + f'(1)\cdot(-0,018) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(-0,018) = 0,991.$$

□

Derivace vyšších řádů

Funkce $y = \sin x$ má derivaci $y' = \cos x$. Toto je opět funkce, která má derivaci a platí $(y')' = -\sin x$.

Definice

Má-li funkce f' v bodě x (na množině M) derivaci $(f')'$, označíme tuto derivaci f'' a nazveme ***derivace druhého řádu (druhá derivace)*** *funkce f.*
Podobně ***derivaci n-tého řádu (n-tou derivaci)*** *$f^{(n)}$ definujeme vztahem*

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Označení podle Leibnize: $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ (čti „d dvě f podle $\mathrm{d}x$ na druhou“),

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2},\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(f(x)\right),\ \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n},\ \left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right)_{x=x_0},\ \text{apod.}$$

Označení podle Cauchyho: $D^2 f$, $D^n y$, apod.

Úloha

Určete všechny derivace funkce $y = 3x^2 - 2x - 1$.

Úloha

Určete 2. derivaci funkce $y = \sin x$ *v bodě* $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Některé vzorce pro n-tou derivaci elementárních funkcí

1) Funkce e^x : $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\quad (e^x)^{(n)} = e^x$;

   podobně pro funkci a^x máme $\quad (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.

2) Funkce $\sin x$, $\cos x$.
   Platí: $f^{(n+4)} = f^{(n)}$, takže takto lze zjistit derivaci libovolného řádu.
   Platí též vzorec
$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

3) Funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$. Zde $f^{(n+2)} = f^{(n)}$.

4) Funkce x^n, $n \in \mathbb{N}$.

$$(x^n)^{(n)} = n!, \ (x^n)^{(m)} = 0, \ \forall m \in \mathbb{N}, \ m > n.$$

Leibnizovo pravidlo pro n-tou derivaci součinu:

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \cdots \\ &\cdots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.\end{aligned}$$

Úloha

Určete 120. derivaci funkce $y = x^2\,\mathrm{e}^x$.

Řešení.

$$\mathrm{e}^x(x^2 + 240x + 14280).$$

□

L'Hospitalovo pravidlo

Následující věta se týká výpočtu limit typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Podobné tvrzení lze vyslovit i pro limity typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ a obě pak použít k výpočtu několika dalších typů limit.

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť

1) *funkce f, g mají derivace v $P(a)$, kde $a \in \mathbb{R}^*$,*
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0,$
3) *existuje vlastní nebo nevlastní* $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K}$.

Pak existuje i $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}}$ *a rovná se* $\boxed{K}$.

L'Hospitalovo pravidlo

Úloha

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-4}$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

Úloha

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$. $[1]$

Úloha

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x^2+5x+4}{3x^3+2x^2+1}$. $[2]$

L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity.

Úloha

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$. $[0]$

L'Hospitalovo pravidlo

- L'Hospitalovo pravidlo neplatí naopak a to v tomto smyslu: z existence limity podílu funkcí neplyne existence limity podílu jejich derivací nebo, což je totéž, z neexistence limity podílu derivací ještě neplyne neexistence limity podílu funkcí.
- Například $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin|x|}{|x|} = 1$.
- Někdy je potřebné použít l'Hospitalovo pravidlo i vícekrát, případně provádět při výpočtu úpravy, které postup zjednoduší.

Úloha

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 x}$. $\left[\frac{9}{2}\right]$

L'Hospitalovo pravidlo

- Při výpočtu limit typu $\boxed{[0 \cdot \infty]}$ součinu funkcí $f \cdot g$ upravíme součin funkcí na podíl

$$\boxed{\frac{f}{\frac{1}{g}} \quad \text{nebo naopak} \quad \frac{g}{\frac{1}{f}}}$$

  tak, aby to bylo vhodné pro použití l'Hospitalova pravidla
- tedy například funkci logaritmickou je zpravidla nejvhodnější nechat v čitateli.

Úloha

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x.$ $[0]$

L'Hospitalovo pravidlo

Počítáme-li limitu typu $[\infty - \infty]$ rozdílu funkcí $f - g$, upravíme rozdíl funkcí na podíl:

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}.$$

Úloha

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{cotg}^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$.

Řešení.

$-\frac{2}{3}$; před použitím l'Hospitalova pravidla nejprve získaný zlomek vhodně rozložíme na součin funkcí. □

L'Hospitalovo pravidlo

U limit typu

$$\boxed{[0^0],\ [\infty^0] \text{ a } [1^\infty]}$$

pro funkce

$$\boxed{f^g}$$

postupujeme tak, že tuto funkci nejprve upravíme na tvar $\boxed{e^{g\cdot \ln f(x)}}$, limitu přeneseme do exponentu (podle věty o limitě složené funkce) a v exponentu dostaneme limitu typu $\boxed{[0\cdot\infty]}$.

Úloha

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$. $[1]$