1 Funkce dvou (více) proměnných

Širší teorii funkcí více proměnných najdete na adrese
`http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/fceviceprom.html`.

Podstatné části zaměřené na funkce dvou proměnných uvádím zde:

Definice 1.1. *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $M \neq \emptyset$. Funkcí dvou proměnných budeme rorimět každé zobrazení*

$$f : M \to \mathbb{R}.$$

Množinu M nazýváme definičním oborem funkce f a značíme $D(f)$.

Poznámka 1.2. *1. Pro funkci dvou proměnných volíme značení*

$$z = f(x, y).$$

2. Proměnné x a y nazýváme nezávisle proměnné, z je závisle proměnná.

3. Není-li dán definiční obor, pak se jím rozumí nejširší přípustná množina v $\mathbb{R}^2$.

Příklad 1.3. *Určete definiční obor funkce $z = x^2 + y^2$.*

Řešení. Funkce (její předpis) neklade žádná omezení na x a y, a tak je

$$D(f) = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

tedy všechny uspořádané dvojice reálných čísel, resp. celá rovina xy. $\square$

Další úlohy na určení definičního oboru funkce dvou proměnných najdete na
`homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_4_1.pdf`.

Parciální derivace

Funkce

$$z = f(x, y)$$

má dvě proměnné. Chceme-li na ni uplatnit definici derivace funkce jedné proměnné, můžeme ji derivovat jen podle jedné proměnné a druhou fixovat (v takovém případě považujeme druhou proměnnou za konstantu.

Definice 1.4. *Říkáme, že funkce $z = f(x,y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ parciální derivaci podle x, jestliže exisatuje (vlastní) limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Podobně říkáme, že funkce $z = f(x,y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ parciální derivaci podle y, jestliže exisatuje (vlastní) limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

1. Obvyklé značení pro parciální derivaci funkce f podle x (podle y) v bodě $A = [x_0, y_0]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(A), \quad f'_x(x_0,y_0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A), \quad f'_y(x_0,y_0).$$

2. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

jsou opět funkce proměnných x a y, s definičními obory

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \subseteq D(f), \qquad D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \subseteq D(f).$$

3. Při výpočtu parciálních derivací používáme stejná pravidla jako u obyčejných derivací (derivace součtu, součinu, ...).

Parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

- Smíšené parciální derivace druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Záměnnost smíšených parciálních derivací:

Věta 1.5. *Jsou-li smíšené parciální derivace*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad a \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$*, pak jsou si v tomto bodě rovny:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A).$$

Příklad 1.6. *Určete parciální derivace prvního a druhého řádu funkce*

$$f(x, y) = 3x^4 - 2xy + xy^2 + y^6.$$

Řešení: Nejprve určíme definiční obor funkce f. Zřejmě

$$D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^4 - 2xy + xy^2 + y^6) = 12x^3 - 2y + y^2 + 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^4 - 2xy + xy^2 + y^6) = 0 - 2x + 2xy + 6y^5.$$

Parciální derivace druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(12x^3 - 2y + y^2) = 36x^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-2x + 2xy + 6y^5) = 2x + 30y^4;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-2x + 2xy + 6y^5) = -2 + 2y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(12x^3 - 2y + y^2) = -2 + 2y.$$

Definiční obory:

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \mathbb{R}^2.$$

□

- Řadu dalších úloh najdete na `homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_1.pdf`.

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Nejprve si lokální extrém funkce dvou proměnných definujeme:

Definice 1.7 (lokální extrémy)**.** *Řekneme, že funkce*

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$$

nabývá v bodě $A \in D(f)$ lokálního maxima*, jestliže existuje okolí*

$$\mathcal{O}(A) \subseteq D(f)$$

bodu A takové, že

$$\textit{pro všechna} \quad X \in \mathcal{O}(A) \quad \textit{platí} \quad f(X) \leq f(A).$$

Řekneme, že funkce

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$$

nabývá v bodě $A \in D(f)$ lokálního minima*, jestliže existuje okolí*

$$\mathcal{O}(A) \subseteq D(f)$$

bodu A takové, že

$$\textit{pro všechna} \quad X \in \mathcal{O}(A) \quad \textit{platí} \quad f(X) \geq f(A).$$

Definice 1.8 (stacionární bod)**.** *Řekneme, že bod $A \in \mathbb{R}^2$ je stacionárním bodem funkce $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$, jestliže v něm jsou obě parciální derivace prvního řádu funkce f nulové, tedy*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0.$$

Podobně jako u funkce jedné proměnné platí:

Věta 1.9. *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$ má v A lokální extrém a nechť f má v A obě parciální derivace.*

Pak nutně A je stacionárním bodem f.

- Tato věta nevylučuje možnost, že lokální extrém nastane v bodě který není stacionárním, ale nesmí v něm alespoň jedna parciální derivace existovat.

Určování lokálních extrémů funkce dvou proměnných

- Označme:

$$D_1(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \qquad D_2(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}$$

hlavní determinanty matice parciálních derivací druhého řádu.

Postačující podmínky pro existenci ostrého lokálního extrému funkce f ve stacionárním bodě A:

Věta 1.10. *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$ je na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ dvakrát spojitě diferencovatelná. Nechť bod A je její stacionární bod.*

1) Jestliže

$$D_2(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2 > 0,$$

pak má funkce f v bodě A ostrý lokální extrém.

Je-li navíc

$$D_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0,$$

jedná se o ostré lokální minimum*, je-li*

$$D_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0,$$

jedná se o ostré lokální maximum.

- *Je-li $D_2(A) < 0$, potom funkce f v A lokální extrém nemá.*

- *V případě $D_2(A) = 0$ nelze o takto o existenci lokálního extrému rozhodnout.*

Příklad 1.11. *Určete lokální extrémy funkce*

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Řešení: 1. *Definiční obor:* funkce je definována na celé rovině xy, tedy $D(f) = \mathbb{R}^2$.

2. Parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Obě parciální derivace jsou definovány a spojité na celé rovině xy.

3. *Stacionární body:*

$$2x = 0 \quad \wedge \quad 2y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = [0,0].$$

4. *Parciální derivace druhého řádu:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.$$

Všechny parciální derivace druhého řádu jsou definovány a spojité na celé rovině xy.

5. *Hlavní determinanty:*

$$D_1(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \qquad D_2(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

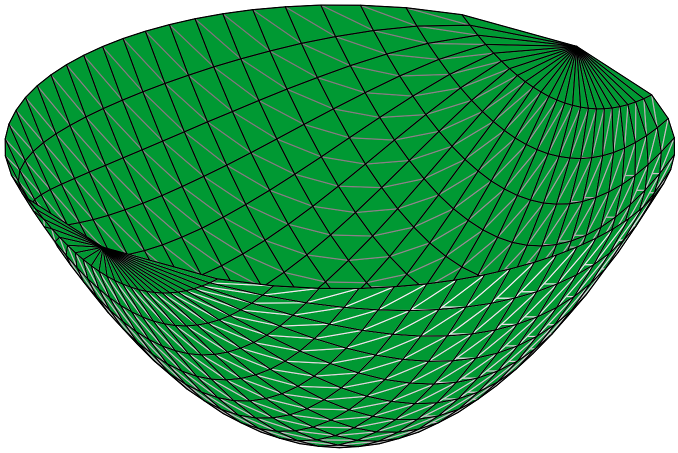
6. *Hodnota hlavních determinantů ve stacionárním bodě $A = [0,0]$:*

$$D_1(0,0) = 2 > 0, \qquad D_2(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0.$$

7. *Vyhodnocení:*

$$D_2(A) > 0 \quad \wedge \quad D_1(A) > 0,$$

a tak má funkce f v bodě $A = [0,0]$ ostré lokální minimum o hodnotě $f(A) = f(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v okolí bodu $[0,0]$, kde má tato funkce lokální minimum 0.

8. *Další lokální extrémy (mimo stacionární body):* Vzhledem k tomu, že obě parciální derivace existují v celé rovině, mohou lokální extrémy nastat pouze ve stacionárních bodech, a tak funkce f žádný další lokální extrém nemá.

$\square$

Příklad 1.12. *Určete lokální extrémy funkce*

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Řešení: 1. *Definiční obor:* funkce je definována na celé rovině xy, tedy $D(f) = \mathbb{R}^2$.

2. Parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou definovány a spojité na celé rovině xy, takže lokální extrémy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech funkce f.

3. *Stacionární body:*

$$2x = 0 \quad \wedge \quad -2y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = [0,0].$$

4. *Parciální derivace druhého řádu:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.$$

Všechny parciální derivace druhého řádu jsou definovány a spojité na celé rovině xy.

5. *Hlavní determinanty:*

$$D_1(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \qquad D_2(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

6. *Hodnota hlavních determinantů ve stacionárním bodě $A = [0,0]$:*

$$D_1(0,0) = 2 > 0, \qquad D_2(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = -4 < 0.$$

7. *Vyhodnocení:*

$$D_2(A) < 0,$$

a tak funkce f v bodě $A = [0,0]$ lokální extrém nemá.

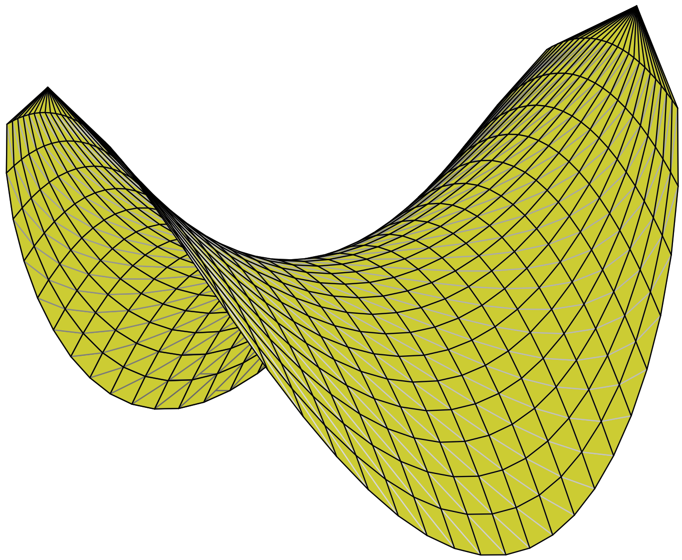
Skutečně, $f(0,0) = 0$ a v libovolném okolí bodu $A = [0,0]$ má funkce f jak záporné ($x = 0 \wedge y \neq 0$), tak i kladné hodnoty ($y = 0 \wedge x \neq 0$).

□

Příklad 1.13. *Určete lokální extrémy funkce*

$$f(x,y) = x^2 + 6\,|y|\,.$$

Řešení: 1. *Definiční obor:* funkce je definována na celé rovině xy, tedy $D(f) = \mathbb{R}^2$.



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ v okolí bodu $[0, 0]$, kde tato funkce lokální extrém nemá. Plocha má tvar sedla (v jednom směru lokální maximum, ve druhém lokální minimum).

2. Parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} -6, & \text{pro } y < 0, \\ \text{neexistuje pro } y = 0, & . \\ 6, & \text{pro } y > 0 \end{cases}$$

Parciální derivace podle x je definována a spojitá na celé rovině xy, zatímco parciální derivace podle y neexistuje na přímce $y = 0$ (mimo tuto přímku je v celé rovině definována a spojitá).

Hledání lokálních extrémů budeme tedy provádět různě ve dvou oblastech, na přímce $y = 0$ a mimo ni.

(a) Mimo přímku $y = 0$ obě parciální derivace existují, tudíž zde může nastat lokální extrém pouze ve stacionárním bodě. Vzhledem k tomu, že parciální derivace podle y je zde vždy nenulová (nabývá hodnot ± 6), žádný stacionární bod zde neexistuje, a tak ani lokální extrém.

(b) Na přímce $y = 0$ neexistuje parciální derivace podle y, a tak lokální extrémy na ní nemůžeme vyšetřovat standardně podle naší věty. Při analýze chování funkce f na přímce $y = 0$ (a v jejím okolí) budeme postupovat následovně:

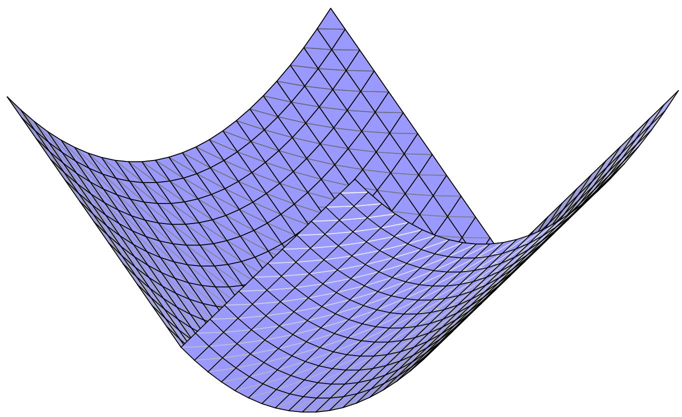
i. Nejprve si uvědomíme, že funkce f je spojitá v celé rovině xy.

ii. Když je v daném bodě parciální derivace podle x nenulová, znamená to, že funkční hodnoty ve směru osy x v daném bodě rostou nebo klesají, a tak zde nemůže být lokální extrém. Když tedy existuje parciální derivace podle x, musí být v lokálním extrému nulová. Na přímce $y = 0$ je parciální derivace podle x nulová pouze v bodě $A = [0, 0]$. Jediným kandidátem na lokální extrém je tedy tento bod.

iii. Vzhledem k tomu, že

$$f(0, 0) = 0^2+6\,|0| = 0 \qquad \text{a} \qquad f(x, y) > 0 \quad \text{pro } (x, y) \neq (0, 0),$$

tak rychle zjišťujeme, že v bodě $[0, 0]$ nabývá funkce f svého lokálního minima 0.



Obrázek 3: Graf funkce $f(x, y) = x^2+6\,|y|$ v okolí bodu $[0, 0]$, kde tato funkce má lokální minimum 0. Na přímce $y = 0$ pro funkci f neexistuje její parciální derivace podle proměnné y (ostrý hřbet plochy).

□

- Řadu příkladů (řešených i neřešených s výsledky) najdete na adrese:
`homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_6_1.pdf`.

1.0.1 Několik příkladů „na lokální extrémy“

Najděte lokální extrémy funkcí:

1. $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$ $\left[\text{LMax v } (1,1)\right]$
2. $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$ $\left[\text{LMin v } (-2,0)\right]$
3. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\left[\text{LMin v } (0,0)\right]$
4. $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\left[\text{nemá lok. extr.}\right]$
5. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ $\left[\text{LMin v } (1,4)\right]$
6. $f(x,y) = 3\ln\dfrac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12-x-y)$ $\left[\text{LMax v } (6,4)\right]$
7. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ $\left[\text{LMax v } (1,1) \text{ a } (-2,-1)\right]$
8. $f(x,y) = 2y^3 + x^2y + x^2 + 5y^2$ $\left[\text{LMin v } (0,0) \text{ a LMax v } \left(0, \frac{-5}{3}\right)\right]$