Obyčejné diferenciální rovnice

Jiří Fišer

LS 2014

1 Úvodní motivační příklad

Po prostudování této kapitoly zjistíte, k čemu mohou být diferenciální rovnice užitečné. Jak se pomocí nich dá modelovat praktický problém, jak může vypadat jejich řešení a co nám přináší jeho další zkoumání.

Praktická motivace je vždy ta nejlepší. Spojením s fyzikou volného pádu si uvědomíme, že diferenciální rovnice skutečně nejsou „jen dalším matematickým výmyslem určeným na terorizování studentů".

Než si přesně nadefinujeme, co to vlastně obyčejné diferenciální rovnice jsou, uvedeme si jeden ilustrační příklad.

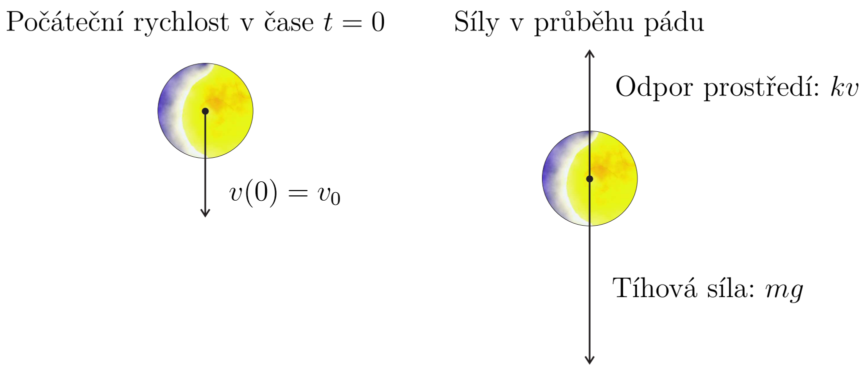
Příklad 1.1 (Vrh tělesem svisle dolů)**.** *Těleso o hmotnosti m vrhneme svisle dolů s počáteční rychlostí v_0 a budeme zkoumat, jak se mění jeho rychlost $v = v(t)$ v následujícím čase $t \geq 0$, jestliže počítáme s odporem vzduchu s koeficientem $k(> 0)$.*

Řešení: Pokud si nejste moc jisti svými fyzikálními znalostmi (a chcete s tím něco dělat), tak doporučuji dvě videa z cyklu České televize „Rande s fyzikou". První je věnováno Newtonovým zákonům[1]a druhé zrychlení a volnému pádu[2].

Na padající těleso působí zemská tíže (urychluje pád) a současně odpor vzduchu (zpomaluje pád). Zatímco zemskou tíži považujeme za konstantní (mg), tak odpor vzduchu závisí přímo úměrně na aktuální rychlosti (kv). Jiné síly působící na těleso neuvažujeme.

[1]`http://www.ceskatelevize.cz/porady/10319921345-rande-s-fyzikou/211563230150003-newtonovy-zakony/video/`

[2]`http://www.ceskatelevize.cz/porady/10319921345-rande-s-fyzikou/211563230150002-zrychleni-a-volny-pad/video/`



Obrázek 1: Grafické znázornění situace padajícího tělesa.

Pokud na těleso působí nějaká nenulová síla, uděluje mu zrychlení. Závislost této síly F, hmotnosti tělesa m a jeho zrychlení a popisuje druhý Newtonův zákon:

$$m \cdot a = F.$$

Hmotnost tělesa m je dána, zrychlení $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ vyjádříme jako derivaci aktuální rychlosti a $F = mg - kv$ je součet uvažovaných sil (síla působící směrem k Zemi je brána kladně, v opačném směru záporně). Po dosazení do rovnice druhého Newtonova zákona:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv. \tag{1}$$

V této rovnici se vyskytuje derivace neznámé (hledané) funkce $v = v(t)$ a je to příklad tzv. lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Rovnice tohoto typu se v průběhu semestru naučíme řešit (=najít funkce, které dané rovnici vyhovují). V tuto chvíli si ukážeme, k čemu lze při řešení takové rovnice dojít. Uvedeme si jednoparametrickou třídu funkcí, které všechny (se svými derivacemi) vyhovují rovnici (1) pro $t \geq 0$:

$$v = v(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \qquad c \in \mathbb{R},\ t \in [0, \infty)\,. \tag{2}$$

Zkusme tuto skutečnost ověřit. Abychom mohli dosadit řešení (2) do rovnice (1), potřebujeme vypočíst derivaci rychlosti

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left[c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right]' = -c\frac{k}{m} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\,.$$

Dosadíme do levé strany (1) a upravíme:

$$L = m \cdot \left(-c\frac{k}{m} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right) = -c \cdot k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\,.$$

Podobně pro pravou stranu (1) po dosazení dostaneme:

$$P = mg - k\left(c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right) = -c \cdot k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

Tedy $L = P$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ a $t \in [0, \infty)$.

Jelikož $c \in \mathbb{R}$, existuje nekonečně mnoho řešení (funkcí), které vyhovují rovnici (1) na intervalu $[0, \infty)$. Čím se liší? Co představují? Jak mezi nimi rozlišovat? Klíčem bude zatím nezapočítaná počáteční rychlost v_0. Mezi všemi možnými řešeními budeme vybírat jen ta, která splňují počáteční podmínku $v(0) = v_0$. Uvidíme, že bude právě jedno:

$$\begin{aligned} v(0) &= v_0, \\ c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}0} + \frac{mg}{k} &= v_0, \\ c + \frac{mg}{k} &= v_0, \\ c &= v_0 - \frac{mg}{k}. \end{aligned}$$

Dosadíme zpět do (2):

$$v = v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \qquad t \in [0, \infty). \tag{3}$$

Řešení (2) nazýváme obecné (zahrnuje všechna řešení), zatímco řešení (3) nazýváme partikulární.

Na závěr prozkoumáme dva limitní stavy partikulárního řešení, pro $k \to 0^+$ (zanedbání odporu vzduchu)

$$\lim_{0<k\to 0^+} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right] = v_0 + gt.$$

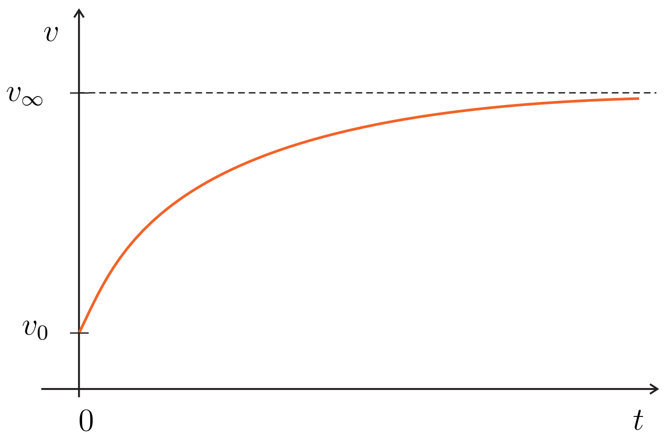
a pro $t \to \infty$ (limitní chování rychlosti v čase)

$$v_\infty := \lim_{t\to\infty} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right] = \frac{mg}{k}.$$

Zde je v_∞ limitní (konstantní) rychlost, při které se odpor vzduchu vyrovná s tíhovým zrychlením.

Na obrázku 2 je znázorněn vývoj rychlosti padajícího tělesa při počáteční rychlosti $v_0 < v_\infty$.

$\square$



Obrázek 2: Graf rychlosti padajícího tělesa $v = v(t)$, kde $v(0) = v_0$ značí počáteční rychlost a v_∞ je rychlost limitní.

2 Diferenciální rovnice — základní pojmy

Po prostudování této kapitoly již budete znát přesnou definici obyčejné diferenciální rovnice n-tého řádu (dokonce budete vědět i co je to ten řád) a jejího řešení. Budete umět ověřit, podle definice, zda nějaká daná funkce je řešením dané diferenciální rovnice.

Po vágním motivačním úvodu je třeba zamířit do bezpečí přesných definic.

Jak jsme si ilustrovali na předchozí ukázce, při praktických úlohách často potřebujeme nalézt neznámou funkci, jejíž vlastnosti jsou popsány pomocí jejích derivací, zasazených do nějaké rovnice. Takovou rovnici pak nazýváme *diferenciální rovnice.*

Poznámka 2.1. *V matematice i v aplikacích se pracuje*

- *s obyčejnými diferenciálními rovnicemi, to jsou ty, kde neznámá funkce je funkcí jedné nezávisle proměnné a derivace neznámé funkce je obyčejnou derivací,*
- *a také s parciálními diferenciálními rovnicemi, kde neznámá funkce je funkcí více proměnných a její derivace jsou tedy derivacemi parciálními.*

V tomto textu se budeme zabývat výhradně obyčejnými diferenciálními rovnicemi, a tak si občas budeme moci dovolit vynechat slovo „obyčejný“ a použít pouze termín „diferenciální rovnice“.

Rovnici
$$F(t, y, y', \dots y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$
kde

- F je daná funkce $n+2$ proměnných, definovaná na nějaké množině
$$G = I \times \Omega, \quad ,$$
kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval[3] a $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
- $t \in I$ je nezávisle proměnná,
- $y = y(t)$ je neznámá funkce, a
- $y', \dots y^{(n)}$ jsou derivace této neznámé funkce y,

nazýváme *obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu.*

Řádem diferenciální rovnice (4) rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v (4) vyskytuje.

Speciálně, pro $n = 1$, tedy máme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu
$$F(t, y, y') = 0.$$

Nyní si ukážeme tři příklady jednoduchých diferenciálních rovnic, u kterých (jen se znalostí základů diferenciálního a integrálního počtu) budeme schopni určit alespoň některá řešení.

Příklad 2.2. *Hledáme funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 2t + \cos t$.*

Ukažme, že jde opravdu o diferenciální rovnici. Rovnici $y' = 2t + \cos t$ lze přepsat na $y' - 2t - \cos t = 0$, což můžeme psát jako $F(t, y, y') = 0$, kde funkci F definujeme předpisem
$$F(t, x_1, x_2) = x_2 - 2t + \cos t.$$
Potom skutečně $F(t, y, y') = y' - 2t - \cos t$, a tak dostáváme
$$F(t, y, y') = 0, \qquad I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}, \quad \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$
tedy
$$G = I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Podle definice primitivní funkce je hledanou funkcí $y(t)$ každá funkce primitivní k zadané funkci $2t + \cos t$, tedy $y = t^2 + \sin t + C$, kde C je (libovolná) integrační konstanta a $t \in \mathbb{R}$. □

[3]Interval I může být různého tvaru, například (a, b), $[a, b]$, (a, ∞) nebo $(-\infty, \infty)$.

Příklad 2.3. *Najdeme funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y'' = -y$.*
Nejprve opět určíme

$$F(t, y, y', y'') = y'' + y, \qquad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

Dále z vlastností derivací funkcí $\cos t$ a $\sin t$ vidíme, že uvedená rovnice je splněna například pro funkci $y_1 = \cos t$, také pro funkci $y_2 = \sin t$, ale rovněž pro

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad \text{kde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ve všech těchto případech nejsou na t žádná definiční omezení (ani v zadání, ani u řešení), a tak můžeme opět vzít $t \in \mathbb{R}$. □

Příklad 2.4. *Najdeme funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 1$, přičemž $y(2) = 5$.*

Určíme

$$F(t, y, y') = y' - 1, \qquad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Nejprve si všimněme jen rovnice $y' = 1$; vyhovuje jí každá funkce $y = t + C$, kde $t \in \mathbb{R}$ a C je libovolná konstanta. Použijeme-li nyní uvedenou podmínku, dostaneme $5 = 2+C$, a z toho $C = 3$. Takže funkce $y = t+3$, $t \in \mathbb{R}$, vyhovuje jak uvedené rovnici, tak zadané podmínce. □

V našich příkladech jde postupně o obyčejné diferenciální rovnice prvního, druhého a opět prvního řádu.

Je čas se ptát po přesnější definici pojmu řešení. Jelikož v diferenciální rovnici je neznámou funkce, množinou řešení takové rovnice je množina funkcí. Tyto funkce musí splňovat dva požadavky:

- musí se dát dosadit do rovnice;
  - tedy musí existovat všechny jejich potřebné derivace
  - a mohou nabývat jen takové hodnoty, aby byly v definičním oboru funkce F,
- po jejich dosazení musí být F identicky rovna nule.

Tyto požadavky hledané funkce nemusí splňovat všude ($\forall t \in I$), ale stačí na nějakém intervalu. Proto obvykle hovoříme o řešení diferenciální rovnice na intervalu.

Definice 2.5 (Řešení diferenciální rovnice). *Funkce φ, která je n-krát spojitě diferencovatelná na intervalu J, je* řešením diferenciální rovnice *(4) na J, jestliže pro každé $t \in J$ platí*

$$\Big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\Big) \in G \quad a \quad F\Big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\Big) = 0.$$

Z této definice vyplývá, že kromě řešení $y = \varphi(t)$ je také třeba určit interval $J \subset I$, na kterém je φ řešením. J nebudeme zjišťovat v tom případě, kdy bude odpovídat přirozenému definičnímu oboru funkce φ.

Poznámka 2.6 ([2]).

- *Řešení diferenciální rovnice prvního řádu $F(t, y, y') = 0$ se také nazývá* integrál diferenciální rovnice *a jeho graf v rovině (t, y) zase* integrální křivka.
- *Ne vždy se podaří nalézt řešení v explicitním tvaru, a tak integrální křivky mohou být dány i implicitně:*
  - *explicitně: $y = \varphi(t)$, $t \in J$,*
  - *implicitně: $H(t, y) = 0$, $(t, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.*
- *Řešit diferenciální rovnici znamená určit všechna její řešení. Ale ne každá taková rovnice musí být řešitelná.*
- *Množinu všech řešení naší diferenciální rovnice (4) nazýváme* obecné řešení.[4]
- *Obecné řešení (4) lze v některých případech (například u lineárních diferenciálních rovnic) vyjádřit ve tvaru*

$$y = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad kde \quad C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

- *Když z obecného řešení vybereme jedno konkrétní (například volbou konstant $C_1, C_2, \dots, C_n$), hovoříme o* partikulárním řešení[5].

[4]Někteří autoři do obecného řešení nezahrnují tzv. singulární řešení. To je definováno tak, že každým bodem integrální křivky odpovídající tomuto řešení prochází alespoň jedna další integrální křivka příslušné diferenciální rovnice. Příkladem singulárního řešení je funkce $y \equiv 0$ v příkladu 3.5 na straně 20 ve skriptech [1].

[5]Singulární řešení lze rovněž chápat jako partikulární řešení.

Příklad 2.7. *Zjistěte, zda funkce*

$$y = 1 + e^t + t - \frac{1}{2}t^2$$

je řešením diferenciální rovnice

$$y'' - y' - t = 0 \tag{5}$$

a na jaké množině (intervalu).

Řešení. Jde o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu, kde definiční obor funkce F (na levé straně rovnice (5)) je

$$G = I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

neboť $F(t, y, y', y'')$ je definována pro libovolné hodnoty svých argumentů.

Nabízená funkce je také definována pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Nyní vypočteme první a druhou derivaci nabízené funkce, abychom mohli výsledek dosadit do rovnice (5):

$$y'(t) = (1+e^t+t-\frac{1}{2}t^2)' = 0+e^t+1-t = e^t+1-t, \qquad y''(t) = (e^t+1-t)' = e^t-1.$$

Nyní dosadíme do (5):

$$L = y'' - y' - t = (e^t - 1) - (e^t + 1 - t) - t = -2 \neq 0 = P.$$

Daná funkce $y = 1 + e^t + t - \frac{1}{2}t^2$ tedy není řešením rovnice (5), neboť jsme nedostali identickou rovnost levé a pravé strany rovnice (5) na žádném intervalu pro t.

Když se ovšem zamyslíme, uvědomíme si, že cíl jsme minuli jen o „kousek“. Stačí upravit znaménko u t a jedničky se nám ve výsledku odečtou:

$$y = 1 + e^t - t - \frac{1}{2}t^2, \quad y'(t) = e^t - 1 - t, \qquad y''(t) = e^t - 1.$$

Tedy

$$L = y'' - y' - t = (e^t - 1) - (e^t - 1 - t) - t = 0 = P, \qquad \text{pro všechna} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Funkce $y = 1 + e^t - t - \frac{1}{2}t^2$ je tedy řešením rovnice (5) na $\mathbb{R}$ ($J = \mathbb{R}$). □

Další příklady:

Příklad 2.8. *Zjistěte, zda funkce*

$$y(t) = \frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{2}e^{-2t} + 6$$

je řešením diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' - \cos t = 0$$

a na jaké množině (intervalu).
[Ano, je řešením na celé reálné ose.]

Příklad 2.9. *Zjistěte, zda funkce*

$$y(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 5$$

je řešením diferenciální rovnice

$$y' - \sqrt{t} = 0$$

a na jaké množině (intervalu).
[Ano, je řešením pro $t \in [0, +\infty)$. Tedy $J = I = [0, +\infty)$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.]

Příklad 2.10. *Zjistěte, zda funkce*

$$y(t) = \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{2}t$$

je řešením diferenciální rovnice

$$2y'' - \frac{1}{t} = 0$$

a na jaké množině (intervalu).
[Ze zadání: $I = (-\infty, 0)$ nebo $I = (0, \infty)$ a $\Omega = \mathbb{R}^3$. Nabízená funkce je řešením na intervalu $J = (0, \infty)$.]

3 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Po této přednášce již vcelku bezpečně poznáte obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu a budete vědět, jak sestrojit její směrové pole.

Čekají Vás obrázky! Budou z Vás malíři diferenciálních rovnic.

Na předchozí přednášce jsme si uvedli, že obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu má obecný implicitní tvar

$$F(t, y, y') = 0.$$

Pro naše účely je to tvar zbytečně obecný. Úplně nám budou stačit rovnice, ve kterých je první derivace neznámé funkce vyjádřena explicitně (jsou zapsány v tzv. normálním tvaru):

$$y' = f(t, y). \tag{6}$$

Budeme předpokládat, že k rovnici (6) existují integrální křivky (grafy řešení) na nějaké množině

$$G = I \times \Omega, \quad I, \Omega \subset \mathbb{R},$$

kde je funkce f definována.

3.1 Geometrická interpretace obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu — směrové pole

Proměnné t a y z rovnice (6) můžeme chápat jako souřadnice bodu (t, y) v rovině ty.

Každému bodu $(t, y) \in G$ je přiřazena hodnota $f(t, y)$ a na základě vztahu (6) je tato hodnota spojena s derivací neznámé funkce y'. Vzhledem k tomu, že geometricky derivace udává směr, máme na G pomocí (6) definováno tzv. *směrové pole*

$$\Big\{\Big(t, y, f(t, y)\Big); (t, y) \in G\Big\},$$

kde uspořádaným trojicím $\Big(t, y, f(t, y)\Big)$ říkáme *lineární elementy.* Tyto se dají znázornit pomocí krátkých úseček se středem v (t, y) a se směrnicí $f(t, y)$.

Integrální křivky diferenciální rovnice (6) mají v každém bodě v G tečnu orientovanou shodně se směrovým polem (směrnice tečny v bodě (t, y) má hodnotu $f(t, y)$)

Křivky v G, ve kterých je

$$y' = f(t, y) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

se nazývají *izokliny.* (Lineární elementy „ležící“ na této křivce mají všechny stejnou směrnici c.)

Příklad 3.1 (Směrové pole)**.** *Znázorněte směrové pole diferenciální rovnice* $y' = \dfrac{y}{t}$, *a to pomocí izoklin. Dále načrtněte graf jednoho řešení.*

Řešení. Pravá strana $f(t, y) = \dfrac{y}{t}$ je definována pro $t \neq 0$ a $y \in \mathbb{R}$. Tím je dáno, že úlohu můžeme uvažovat na dvou oblastech:

$$G_1 = (-\infty,0) \times \mathbb{R}, \qquad \text{nebo} \qquad G_2 = (0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

Izokliny jsou ty křivky v G, na kterých je derivace y', a tedy i hodnoty $f(t, y)$, konstantní. Budeme je tedy hledat pomocí rovnice

$$\frac{y}{t} = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

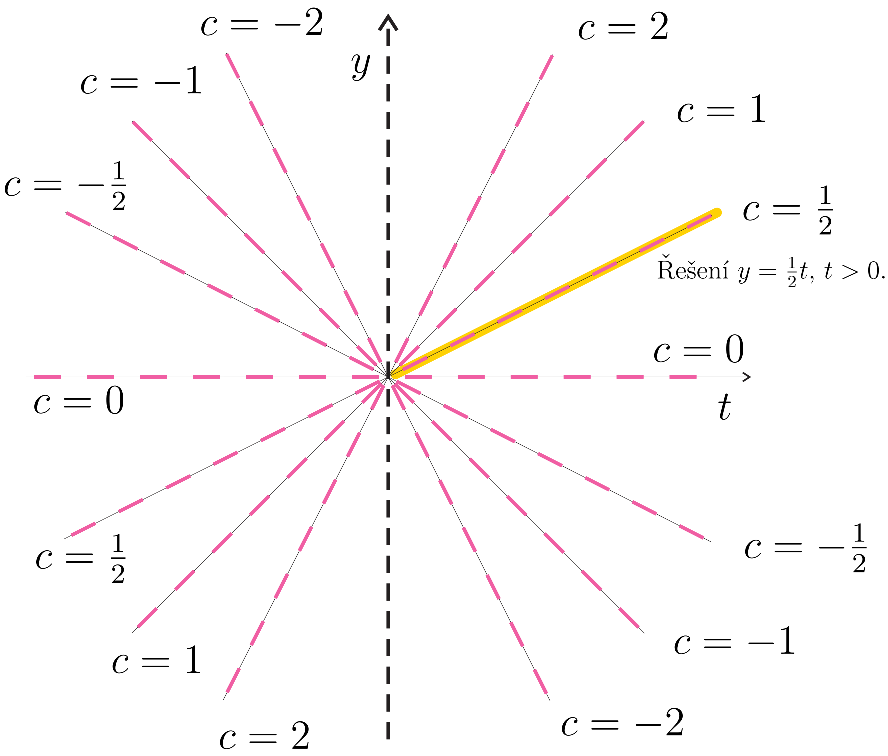
odkud (snažíme se explicitně vyjádřit závislost y na t)

$$y = ct, \quad c \in \mathbb{R}.$$

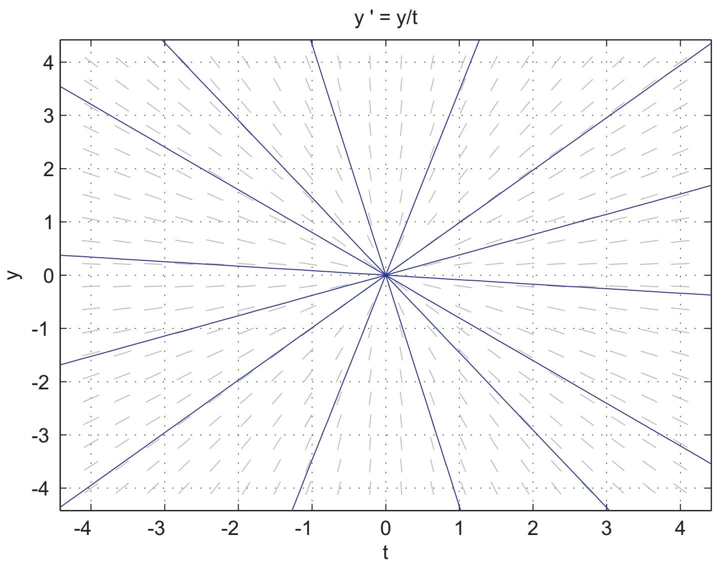
Pro každé $c \in \mathbb{R}$ jde o rovnici přímky, která prochází počátkem a má směrnici c. Když vezmeme v potaz podmínku $t \neq 0$ (resp. naše uvažované oblasti G_1 a G_2), tak dostaneme vždy dvě polopřímky, na kterých směrnice lineárních elementů mají totožnou hodnotu c. To znamená, že jsou v dané polopřímce obsaženy.

Současně z toho plyne, že i grafy řešení se s těmito polopřímkami shodují. Vše je graficky znázorněno na obrázku 3.

□



Obrázek 3: Směrové pole z příkladu 3.1 sestrojené pomocí izoklin.



Obrázek 4: Směrové pole z příkladu 3.1 sestrojené pomocí počítače (sítě bodů).

Příklad 3.2 (Směrové pole)**.** *Znázorněte směrové pole diferenciální rovnice* $y' = t - \sqrt{y}$ *pomocí izoklin. Také se pokuste načrtnout graf některého řešení.*

Řešení. Pravá strana $f(t, y) = t - \sqrt{y}$ je definována pro $t \in \mathbb{R}$ a $y \geq 0$, tím je dáno

$$G = (-\infty,\infty) \times [0,\infty).$$

Izokliny:

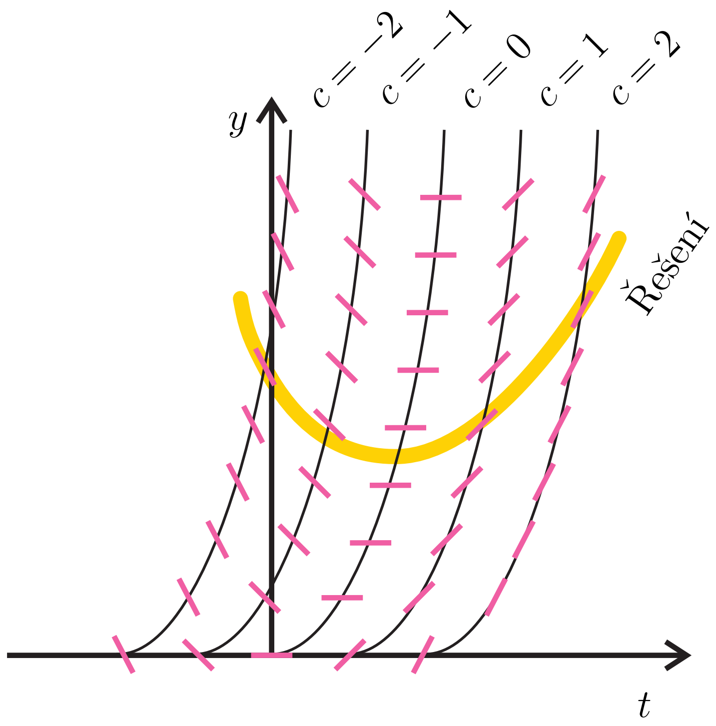
$$t - \sqrt{y} = c, \qquad \text{a tedy} \qquad \sqrt{y} = t - c.$$

Zde můžeme nahlédnout, že výraz dává smysl jen pro $t \geq c$, neboť levá strana ($\sqrt{y}$) je nutně nezáporná, což samozřejmě musíme požadovat i po pravé straně. Celkově tedy dostaneme:

$$y = (t - c)^2, \quad c \in \mathbb{R},\ t \geq c.$$

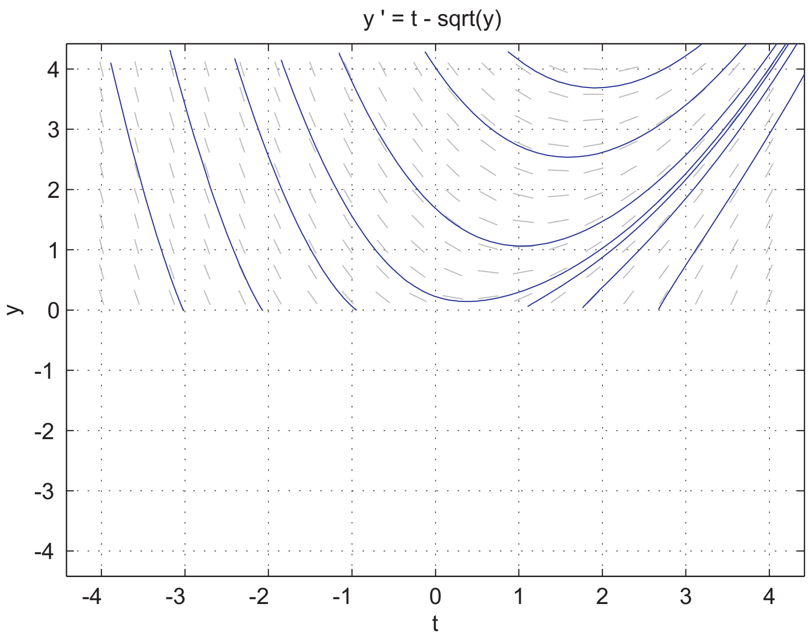
Pro zvolené c tedy půjde o pravou polovinu paraboly s vrcholem (počátkem) v bodě $(c, 0)$.

Vše (i s náčrtkem řešení) je znázorněno na obrázku 5.



Obrázek 5: Směrové pole z příkladu 3.2 sestrojené pomocí izoklin.

□



Obrázek 6: Směrové pole z příkladu 3.1 sestrojené pomocí počítače (sítě bodů).

Další příklady:

Příklad 3.3. *Znázorněte směrová pole následujících diferenciálních rovnic. Pokuste se načrtnout i graf nějakého řešení.*

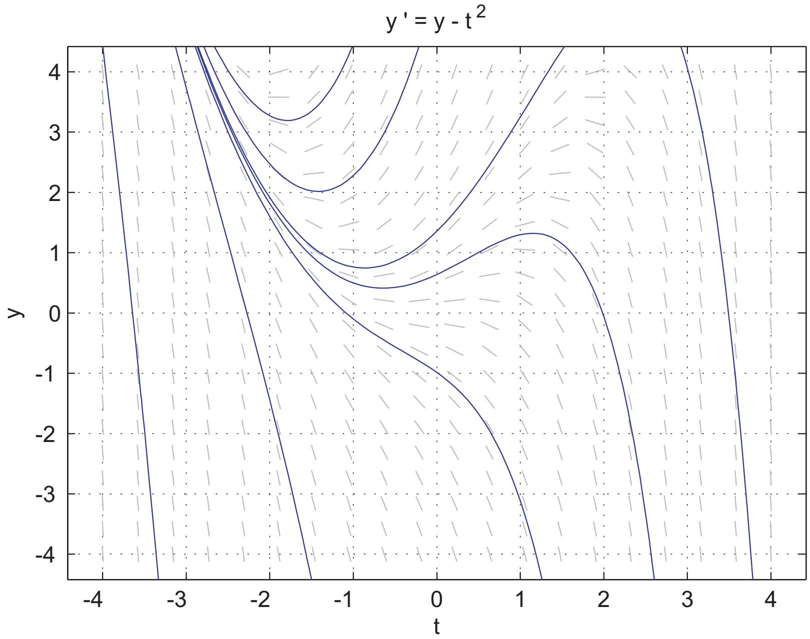
a) $y' = y - t^2$,

b) $2y' + 2y - t - 3 = 0$,

c) $y' = \dfrac{y}{t-y}$,

d) $y' = t^2 + y^2$,

e) $y' = -\dfrac{t}{y}$.



Obrázek 7: Směrové pole z příkladu 3.3a) sestrojené pomocí počítače (sítě bodů).

3.2 Existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy

Často nás ve výsledku nebudou zajímat všechna řešení dané úlohy, ale jen taková, která mají požadovanou vlastnost, splňují určitou podmínku.

Přitom je důležité, zda takové řešení vůbec existuje (existence řešení), a když ano, zda jich nemůže být víc ((ne)jednoznačnost řešení).

Takové podmínky mohou být formulovány různě, my se však zaměříme jen na jeden typ.

Cauchyova úloha

Budeme se věnovat tzv. *počáteční podmínce*

$$y(t_0) = y_0, \tag{7}$$

která společně s diferenciální rovnicí (6) tvoří tzv. *Cauchyovu úlohu*, která je základní úlohou v teorii diferenciálních rovnic.

Definice 3.4 (Cauchyova úloha)**.** *Mějme diferenciální rovnici (6) a počáteční podmínku (7).*

Jejich kombinaci, úlohu

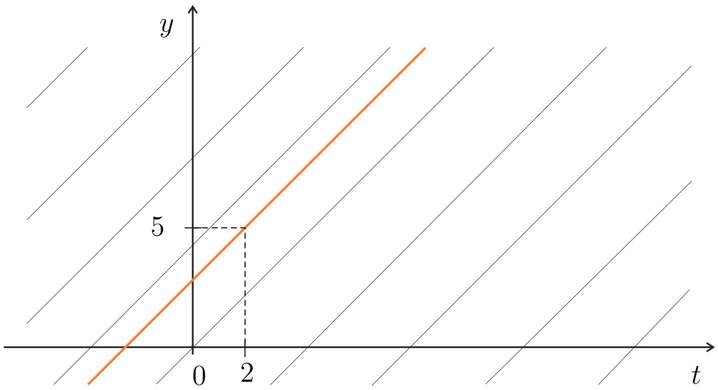
$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \ (t_0, y_0) \in G, \end{cases} \tag{8}$$

nazýváme Cauchyova úloha.

Za její řešení bereme takové řešení $y = y(t)$ diferenciální rovnice $y' = f(t, y)$, které je definováno na nějakém intervalu J (kde $t_0 \in J$) a splňuje počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$.

Příklad Cauchyovy úlohy je v příkladu 2.3 na straně 12 skript [1]. Integrální křivky z tohoto příkladu představují soustavu navzájem rovnoběžných přímek $y = t + C$, $C \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení dané Cauchyovy úlohy (s počáteční podmínkou $y(2) = 5$) je pak reprezentováno tou přímkou soustavy, která prochází bodem $(2, 5)$.

Vše je znázorněno na obrázku 8.



Obrázek 8: Grafické znázornění řešení (přímky $y = t + C$, $C \in \mathbb{R}$) rovnice $y' = 1$. Zvýrazněno je řešení $y = t+3$ splňující počáteční podmínku $y(2) = 5$.

Existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy

Postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy můžeme schematicky znázornit následovně:

$$f(t, y) \text{ spojitá na } D \implies \textsc{Existence}$$

$$\left.\begin{array}{c} f(t,y) \text{ spojitá na } D \\ + \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ omezená na } D \end{array}\right\} \implies \textsc{Existence a jednoznačnost}$$

Obdélník D, který se ve schématu vyskytuje je definován ve skriptech [1] na straně 19, kde je o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy pojednáno podrobněji.

Zde si vystačíme s následující větou, ve které D nahradíme celou rovinou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Věta 3.5. *Nechť pravá strana rovnice (6) splňuje následující dvě podmínky:*

- *je spojitá funkce na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vzhledem k oběma proměnným t a y;*
- *má na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ spojitou a ohraničenou parciální derivaci $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.*

Potom Cauchyova úloha (8) má právě jedno řešení $y = y(t)$ definované na celém $\mathbb{R}$.

Příklad 3.6 ([2])**.** *Ukážeme, že řešení rovnice*

$$y' = t + \cos y$$

s počáteční podmínkou $y(t_0) = y_0$ je definované na celém intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení. Pravá strana je spojitá na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ v obou proměnných t a y a parciální derivace pravé strany vzhledem k y existuje a je ohraničená v celé rovině (t, y), protože

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |0 - \sin y| = |\sin y| \leq 1.$$

Tím jsou splněny předpoklady věty 3.5, a tak podle ní má úloha

$$\begin{cases} y' = t + \cos y, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

právě jedno řešení $y = y(t)$ definované pro $t \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$. □

Ukázku nejednoznačného řešení najdete v příkladu 3.5 skript [1] na straně 20.

4 Vybrané elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

Po prostudování této kapitoly již budete umět rozeznat a vyřešit separovatelnou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu.

Konečně se vám dostane do ruky nástroj (postup) k aktivnímu vyřešení nějaké diferenciální rovnice.

Chceme-li úspěšně řešit diferenciální rovnice, je třeba:

- poznat, jakého typu je zadaná rovnice,
- znát algoritmus řešení tohoto typu rovnic,
- správně zvládnout potřebné výpočetní operace.

Pojďme si tedy představit první typ diferenciálních rovnic, který se naučíme řešit.

4.1 Separace proměnných

Tuto metodu lze užít u tzv. separovatelných rovnic. Ty lze převést na tzv. separovanou rovnici

$$\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \psi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{9}$$

ve kterém jsou proměnné t a y separovány (odděleny), každá na své straně rovnice.

Uvažujme dále rovnici

$$\Phi(y) = \Psi(t) + C, \tag{10}$$

kde $\Phi(y)$ je funkce primitivní k $\varphi(y)$, $\Psi(t)$ je primitivní k $\psi(t)$ a C je (integrační) konstanta. Jinými slovy, levou stranu rovnice (9) jsme integrovali podle y a pravou stranu podle t, přičemž jsme dvě integrační konstanty nahradili jedinou, umístěnou na pravé straně.

Dá se ukázat (naznačeno je to ve skriptech [1] na straně 22), že funkce $y = u(t)$ je řešením rovnice (9) právě tehdy, když vyhovuje rovnici (10); touto rovnicí lze tedy vyjádřit obecné řešení dané diferenciální rovnice (9).

Vraťme se nyní k naší rovnici $y' = f(t, y)$. Kdy ona bude separovatelná? Zřejmě tehdy, když její pravá strana půjde vyjádřit jako součin, $f(t, y) = g(t)h(y)$:

$$y' = g(t)h(y). \tag{11}$$

Za předpokladu $h(y) \neq 0$ a při vědomí $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ můžeme (11) převést na separovanou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(t)\,\mathrm{d}t, \tag{12}$$

která se již řeší jako (9).

Zbývá vyšetřit podmínku $h(y) \neq 0$. Pokud má rovnice

$$h(y) = 0 \tag{13}$$

nějaké řešení $y = y_0 (\in \mathbb{R})$, potom je konstantní funkce $y \equiv y_0$ řešením (11), neboť po dosazení do (11) postupně dostáváme: $(y_0)' = h(y_0)g(t)$, $0 = 0g(t)$, $0 = 0$ (neboť derivace konstanty na levé straně rovnice je nula).

Za obecné řešení (11) budeme brát obecné řešení (12) doplněné o kořeny (13).

Vše si prakticky ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 4.1. *Najdeme obecné řešení rovnice* $y' = \dfrac{t(1-y)}{1+t}$.

Řešení. Ze zadání vyplývá, že řešení budeme hledat pro $t \neq -1$, neboť pro tuto hodnotu t není pravá strana definována.

Tato rovnice sice zatím není separovaná, ale je separovatelná, tj. lze v ní separovat proměnné. Vyjádříme-li y' jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, lze rovnici upravit na tvar, kde proměnné jsou již separované:

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t}, \tag{14}$$

přičemž použitá úprava vyžaduje předpoklad $y \neq 1$. Dále

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t}.$$

Po integraci máme

$$-\ln|1-y| = t - \ln|1+t| + C,$$

kde C je libovolná konstanta. V této chvíli je daná diferenciální rovnice již v podstatě vyřešena, všechno další jsou úpravy a kompletace řešení.

Předně, jsou-li v takto získané rovnici logaritmy, bývá vhodné i integrační konstantu vyjádřit jako logaritmus: $C = \ln C_1$, kde C_1 je libovolná *kladná* konstanta (zůstává zachováno, že C je *libovolná* konstanta). Rovnici

$$\ln|1+t| - \ln|1-y| = t + \ln C_1$$

odlogaritmujeme a máme

$$\left|\frac{1+t}{1-y}\right| = C_1\,\mathrm{e}^t\,.$$

Položíme-li $C_2 = \frac{1}{C_1}$ ($C_2 > 0$ je pak také libovolná kladná konstanta), pak

$$\frac{1-y}{1+t} = \pm C_2\,\mathrm{e}^{-t}$$

a z toho

$$\frac{1-y}{1+t} = C_3\,\mathrm{e}^{-t},$$

kde $C_3 \neq 0$, tedy

$$\begin{aligned} 1-y &= C_3\,\mathrm{e}^{-t}(1+t),\\ y &= 1 - C_3\,\mathrm{e}^{-t}(1+t), \end{aligned}$$

což je obecné řešení (14) v explicitním tvaru.

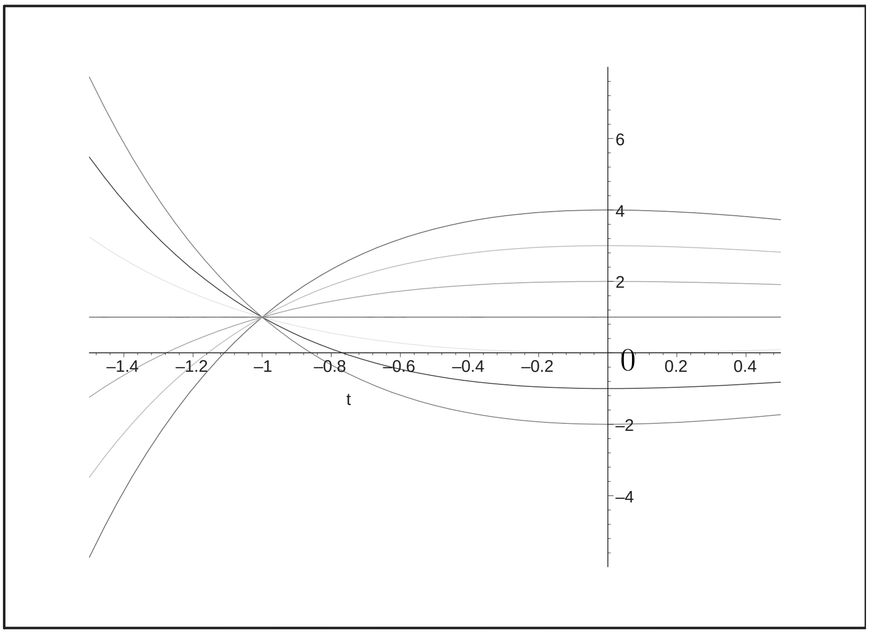
Nyní se vrátíme k podmínce ($y \neq 1$), kterou si vyžádala metoda řešení, a podíváme se, zda jsme tím nezanedbali nějaké řešení. Tedy ověříme, zda $y \equiv 1$, je řešením, tím, že tuto funkci dosadíme do levé a pravé strany dané diferenciální rovnice:

$$L = y' = 0, \qquad P = \frac{t(1-y)}{1+t} = 0.$$

Jelikož $L = P$ pro $t \neq -1$, funkce $y \equiv 1$, $t \neq -1$, je skutečně řešením. Toto řešení však nemusíme uvádět zvlášť, protože je dostaneme, když ve výše uvedeném obecném řešení připustíme nulovou hodnotu C. Konečný tvar obecného řešení je tedy

$$\left[y = 1 + C\,\mathrm{e}^{-t}(1+t), \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \neq -1 \right].$$

Situace je znázorněna na obrázku 9. Všimněte si zajímavého chování řešení v blízkosti bodu $(-1, 1)$. $\square$



Obrázek 9: Grafické znázornění několika řešení úlohy 4.1.

Příklad 4.2. *Najdeme (obecné) řešení diferenciální rovnice* $y' = \dfrac{1-2t}{y^2}$.

Řešení. Ze zadání této separovatelné diferenciální rovnice plyne, že neznámá funkce y se nikdy nesmí rovnat nule,

$$y \neq 0,$$

neboť se vyskytuje ve jmenovateli. Tato skutečnost nám umožňuje vynásobit celou rovnici y^2 a po přepsání derivace na podíl diferenciálů dostáváme (zde bez dodatečných podmínek):

$$y^2 y' = 1 - 2t.$$

Pokračujeme v úpravách a výpočtech:

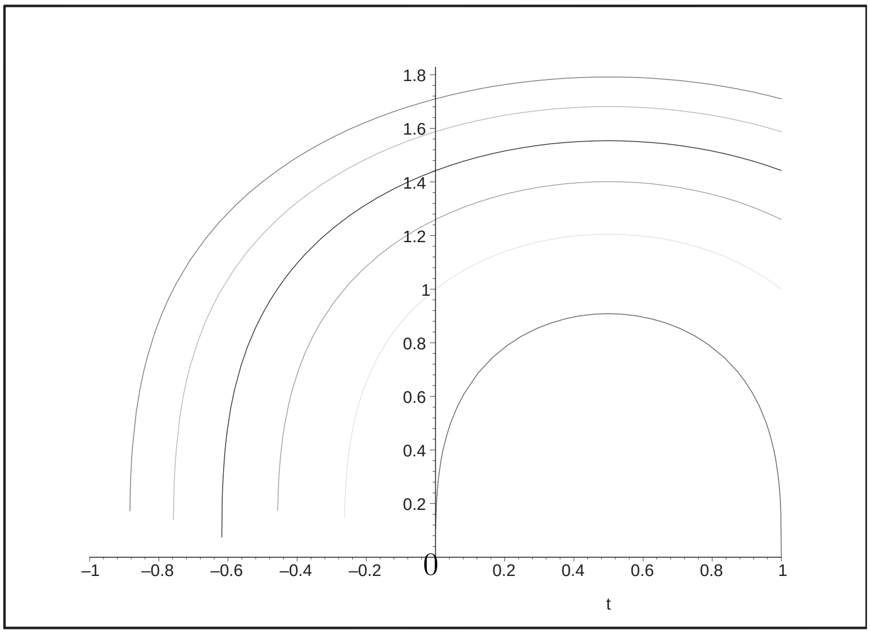
$$\begin{aligned}
y^2 \,\mathrm{d}y &= (1-2t)\,\mathrm{d}t, \\
\int y^2 \,\mathrm{d}y &= \int (1-2t)\,\mathrm{d}t, \\
\frac{1}{3}y^3 &= t - t^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
y^3 &= 3t - 3t^2 + C_2, \quad C_2 = 3C_1 \Rightarrow C_2 \in \mathbb{R}, \\
y &= \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C_2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Obecné řešení dané rovnice je

$$\left[y = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0 \right].$$

Na obrázku 10 je poněkud nedokonale znázorněno několik kladných řešení.

$\square$



Obrázek 10: Grafické znázornění několika řešení úlohy 4.2.

Další příklady:

Příklad 4.3. *Pomocí separace proměnných vyřešte následující diferenciální rovnice:*

1. $y' = \dfrac{y}{x}, \quad [y = Cx,\ C \in \mathbb{R},\ x \neq 0],$

2. $y' = \dfrac{x}{y}, \quad \left[y = \pm\sqrt{x^2 + C},\ C \in \mathbb{R},\ y \neq 0,\ x \geq -C\right],$

3. $y' = -\dfrac{y}{x}, \quad \left[y = \frac{C}{x},\ C \in \mathbb{R},\ x \neq 0\right],$

4. $y' = -\dfrac{x}{y}$, $\quad [y^2 + x^2 = C,\ C \geq 0,\ y \neq 0]$,

5. $y' = \dfrac{y-1}{x^2y^2}$, $\quad \left[\begin{array}{l} \frac{y^2}{2} + y + \ln(y-1) = -\frac{1}{x} + C,\ C \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ y \neq 0, \\ y \equiv 1 \end{array}\right]$.

5 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu ($\mathrm{LDR}_{1.ř}$)

Po prostudování této kapitoly budete schopni rozpoznat a vyřešit $\mathrm{LDR}_{1.ř}$ metodou variace konstanty.

Výhodou $\mathrm{LDR}_{1.ř}$ je jejich jednoduchý tvar a přímočaré řešení.

Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu nazýváme rovnici tvaru

$$y' + p(t)y = f(t). \tag{15}$$

Funkce $f(t)$ se nazývá *pravá strana*. Pokud pravá strana není identicky rovna nule, máme *nehomogenní* $\mathrm{LDR}_{1.ř}$ ($\mathrm{NHLDR}_{1.ř}$), v opačném případě máme rovnici *homogenní* ($\mathrm{HLDR}_{1.ř}$):

$$y' + p(t)y = 0 \tag{16}$$

Budeme předpokládat, že p a f jsou spojité funkce na nějakém intervalu I. Jak je to potom s existencí řešení počáteční úlohy?

Věta 5.1 (O globálnosti řešení $\mathrm{LDR}_{1.ř}$, [2])**.**
Jestliže jsou funkce p a f spojité na intervalu I, potom úloha

$$\begin{cases} y' + p(t)y = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

kde $t_0 \in I$ a y_0 je libovolné reálné číslo, má jediné řešení $y = y(t)$ na celém intervalu I.

$\mathrm{LDR}_{1.ř}$ jsou velmi důležité. Jednak na ně vede řada významných praktických problémů (chemické reakce, množení bakterií, radioaktivní rozpad, ochlazování těles, ...) a jednak lze některé jiné typy rovnic řešit tak, že je transformujeme na $\mathrm{LDR}_{1.ř}$.

Existuje několik metod, jak řešit $\mathrm{LDR}_{1.ř}$; lze je například řešit i vzorcem.[6] Nejznámější je *metoda variace konstanty.*

[6] Prakticky se dává přednost použití některé z aktivních metod, sloužících jinak i k odvození onoho vzorce.

Metoda variace konstanty

Tato metoda spočívá ve třech krocích:

1. Nejprve řešíme (separací proměnných) příslušnou rovnici homogenní a obecné řešení zapíšeme s integrační konstantou K.

2. Řešení nehomogenní rovnice hledáme v tomtéž tvaru, kde však $K = K(t)$ je funkce (odsud i název metody: z konstanty „se stane“ funkce). Dosadíme tedy funkci vypočtenou v bodě 1 do dané nehomogenní rovnice a dostaneme rovnici pro neznámou funkci K'.

3. Integrací vypočteme $K(t)$ (s integrační konstantou C) a dosadíme je do funkce vypočtené v kroku 1.

Postup při řešení $\mathrm{LDR}_{1.\check{r}}$ metodou variance konstanty si ukážeme na příkladu.

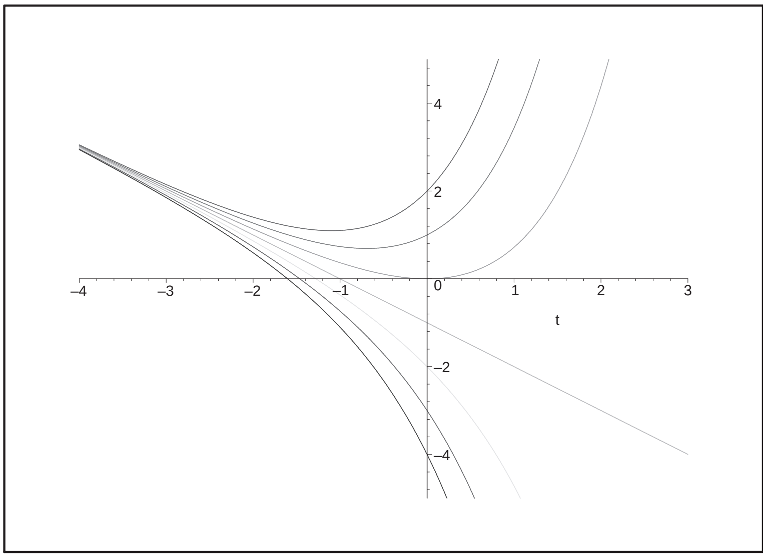
Příklad 5.2. *Určíme obecné řešení diferenciální rovnice $y' = t + y$.*

Řešení: Danou rovnici lze přepsat do standardního tvaru $y' - y = t$, máme tedy $p(t) \equiv -1$ a $f(t) = t$. Podle návodu řešíme ve třech krocích:

1. Metodou separace proměnných vyřešíme příslušnou homogenní rovnici $y' - y = 0$. Její obecné řešení je
$$y = C \cdot \mathrm{e}^t,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že C nahradíme funkcí $K = K(t)$. Po dosazení máme
$$K' \cdot \mathrm{e}^t + K \cdot \mathrm{e}^t - K \cdot \mathrm{e}^t = t;$$
dva členy s K se ruší (a to vždy!) a máme
$$K' = t \cdot \mathrm{e}^{-t}.$$

3. Integrujeme:
$$K = \int t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [\text{metoda per partes}] = C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}.$$
Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^t$ a dostáváme
$$y = (C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}) \cdot \mathrm{e}^t.$$
Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy
$$\Big[y = C \cdot \mathrm{e}^t - t - 1, \quad C \in \mathbb{R}\Big].$$



Obrázek 11: Grafické znázornění několika řešení z příkladu 5.2.

$\square$

Poznámka 5.3. *Vidíme, že obecné řešení nehomogenní rovnice je rovno součtu obecného řešení příslušné rovnice homogenní ($C \cdot \mathrm{e}^t$) a partikulárního řešení dané rovnice nehomogenní ($-t-1$). Tento poznatek platí pro lineární rovnice obecně.*

Příklad 5.4. *Určíme obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y\cos t = \sin 2t$.*

Řešení: Pravá strana je $\sin 2t$, příslušná rovnice homogenní je $y' + y\cos t = 0$.

1. Separací proměnných dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že C nahradíme funkcí $K = K(t)$. Po dosazení máme
$$K' \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} + K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}(-\cos t) + K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}\cos t = \sin 2t;$$
dva členy s K se ruší (jako vždy) a máme $\quad K' = \mathrm{e}^{\sin t}\sin 2t$.

3. Integrujeme:
$$K = \int \mathrm{e}^{\sin t}\sin 2t\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^{\sin t}\, 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = 2\sin t & v' = \mathrm{e}^{\sin t}\cos t \\ u' = 2\cos t & v = \mathrm{e}^{\sin t} \end{bmatrix}$$
$$= 2\,\mathrm{e}^{\sin t}\sin t - \int 2\,\mathrm{e}^{\sin t}\cos t\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{e}^{\sin t}\sin t - 2\,\mathrm{e}^{\sin t} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

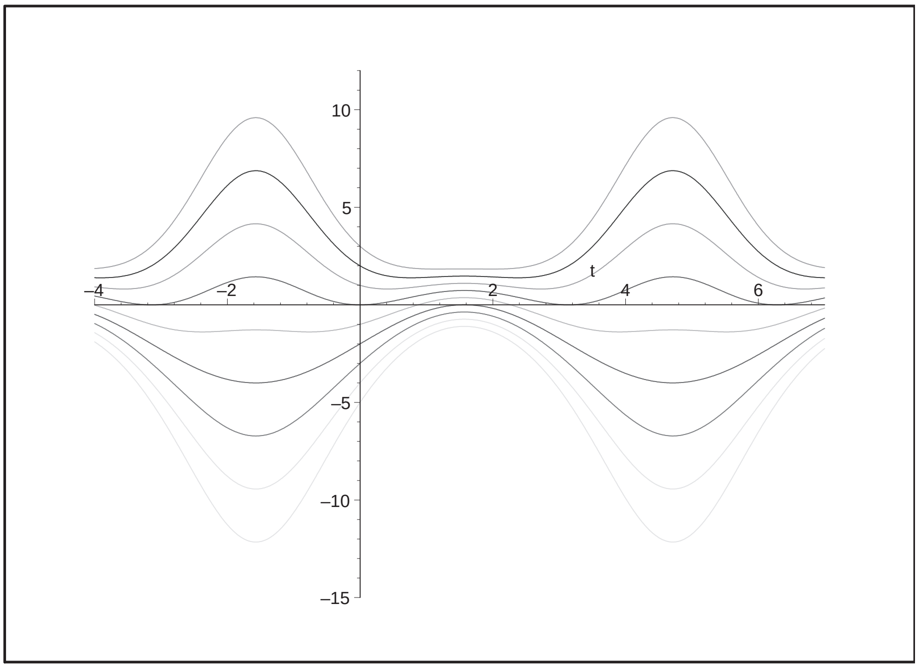
Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}$ a dostáváme

$$y = (2\,\mathrm{e}^{\sin t} \sin t - 2\,\mathrm{e}^{\sin t} + C) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$\left[y = 2(\sin t - 1) + C \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}, \quad C \in \mathbb{R}\right].$$

□



Obrázek 12: Grafické znázornění několika řešení z příkladu 5.4.

Další příklady:

Příklad 5.5. *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice*
$y' + 2ty = 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}$. $\left[y = C\,\mathrm{e}^{-t^2} + t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}\right]$

Příklad 5.6. *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice*
$y' + 2y = t^2 + 2t$. $\left[y = C\,\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{1}{4}(2t^2 + 2t - 1), \quad C \in \mathbb{R}\right]$

Použitá a rozšiřující literatura

[1] J. Fišer: *Úvod do teorie obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic.* Skripta Přf UP, Olomouc, 2013.

[2] J. Diblík, M. Růžičková: *Obyčajné diferenciálne rovnice.* EDIS-vydavatelství ŽU, Žilina, 2008.

[3] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU Brno, PřF, 2001.

[4] J. Kopáček: *Matematická analýza nejen pro fyziky II.* Matfyzpress, Praha, 2007.

[5] P. Kreml a kol.: *Matematika II.* VŠB-TU Ostrava, [online], dostupné z: `http://www.studopory.vsb.cz/materialy.html`, [citováno 15. 10. 2012].

[6] J. Kuben: *Obyčejné diferenciální rovnice.* VA Brno, 2000.

[7] J. Nagy: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* MVŠT IX, SNTL, Praha, 1978.