

# KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 1,

## Neurčitý integrál 1

17. února 2016

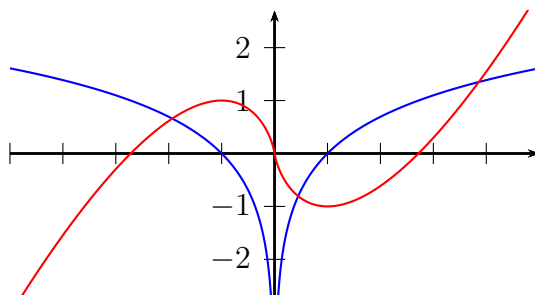
### 1 Opakování, příprava pro integrování

Spojitosť, limita funkce, derivace.

**Úloha 1.1.** Uvažujme funkci  $F(x) = x \ln |x| - x$ .

- Určete její definiční obor.
- Jak je to s její spojitostí? Případnou nespojitost vyšetřete pomocí limit.
- Ukažte, že  $F'(x) = \ln |x|$  (rozdělte si to na dva případy:  $x > 0$  a  $x < 0$ ).
- Jaký je definiční obor  $F'$ ?
- Načrtněte graf funkce  $f(x) = \ln |x|$ .

(Můžete se inspirovat na obrázku 1. Co přesně na něm je?)

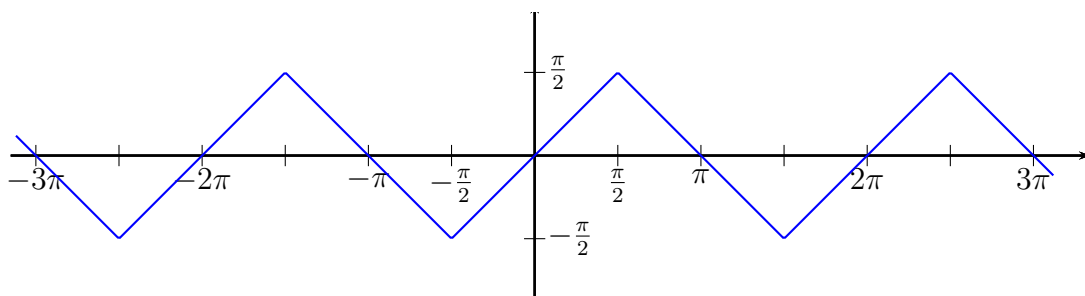


Obrázek 1: Ilustrace k úloze 1.1.

**Úloha 1.2.** Uvažujme funkci  $F(x) = \arcsin(\sin x)$ .

- Určete její definiční obor.

- Jak je to s její spojitostí? Případnou nespojitost vyšetřete.
- Za pomoci vzorce  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  určete  $F'(x)$  a  $D(F')$ .
- Načrtněte graf  $F'$ .
- Zvládli byste i graf původní funkce  $F$ ?



Obrázek 2: Ilustrace k úloze 1.2.

## 2 Integrace

### 2.1 Primitivní funkce, neurčitý integrál

**Definice 2.1.** Řekneme, že funkce  $F$  je primitivní k funkci  $f$  na (otevřeném) intervalu  $J = (a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , jestliže pro každé  $x \in J$  platí

$$F'(x) = f(x).$$

**Úloha 2.2.** Najděte primitivní funkci k funkci  $f(x) = x^2$  a určete na jakém intervalu.

*Řešení.* Vzhledem ke znalosti mechanismu derivování mocninné funkce,

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}, \quad (\text{definiční obor závisí na } n),$$

je kandidátem funkce  $x^3$ . Ovšem  $(x^3)' = 3x^2$ , a tak s využitím pravidla pro derivování reálného násobku funkce,

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x),$$

„doladíme“ na

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Zde již platí  $F'(x) = f(x)$ , neboť

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 = x^2 = f(x).$$

Maximální interval, kde toto platí, je

$$J = (-\infty, \infty).$$

Funkce  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  je tedy primitivní funkcí k funkci  $f(x) = x^2$  na intervalu  $J = (-\infty, \infty)$ .  $\square$

Vzhledem k tomu, že derivace konstantní funkce je rovna nulové funkci a derivace součtu dvou funkcí je rovna součtu jejich derivací, tak pro  $F$  primitivní k  $f$  na  $J$  je také funkce  $F + C$ ,  $C = konst. \in \mathbb{R}$ , také primitivní k  $f$  na  $J$ , neboť

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Takto vidíme, že při existenci jedné primitivní funkce  $F$  dále existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí  $F + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Vzhledem k tomu, že tyto funkce se liší pouze o přičtenou konstantu, tak jejich grafy jsou „shodné“ až na posunutí ve směru osy  $y$ .

Primitivní funkce je definována pomocí derivace (musí být „derivace-schopná“), a tak musí být na  $J$  spojitá.

**Definice 2.3.** *Souhrn všech primitivních funkcí k dané funkci  $f$  nazýváme neurčitý integrál a značíme*

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (C \in \mathbb{R}), \quad x \in J.$$

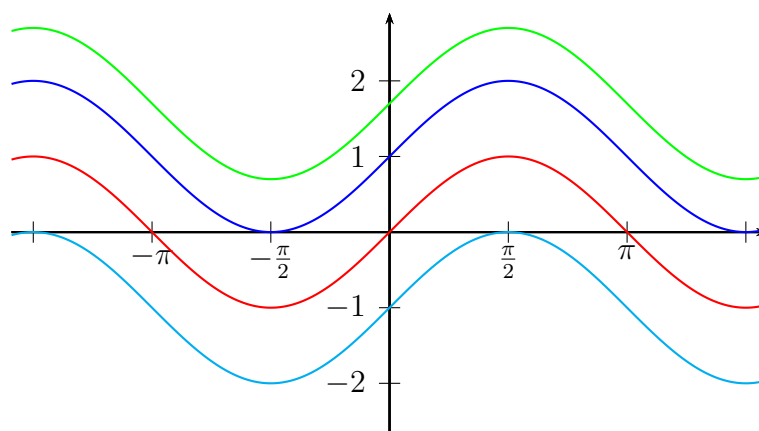
**Úloha 2.4.** *Určete*

$$\int \cos x dx.$$

*Řešení.* Víme, že derivace funkce sinus je  $(\sin x)' = \cos x$ , a tak

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad J = (-\infty, \infty).$$

Několik takových funkcí je znázorněno na obrázku 3.  $\square$



Obrázek 3: Grafy několika primitivních funkcí z úlohy 2.4:  $y = \sin x$ ,  $y = \sin x + 1,7$ ,  $y = \sin x - 1$  a  $y = \sin x + 1$ .

Tak bychom z tabulky derivací elementárních funkcí mohli odvodit i další neurčité integrály:

- $\int c \, dx = cx + C, \quad J = (-\infty, \infty).$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \quad J \text{ závisí na } n.$

**Úloha 2.5.** Pro ilustraci předchozího vzorce vypočteme:

$$a) \int x \, dx = \int x^1 \, dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C, \quad J = (-\infty, \infty).$$

$$b) \int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C,$$

$$J = (-\infty, 0) \text{ nebo } J = (0, \infty).$$

$$c) \int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C,$$

$$J = (0, \infty).$$

$$d) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int x^{-\frac{1}{3}} \, dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + c,$$

$$J = (-\infty, 0) \text{ nebo } J = (0, \infty).$$

Dále uvedeme:

$$\bullet \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad J = (-\infty, 0) \quad \text{nebo} \quad J = (0, \infty).$$

Poslední vzorec je zřejmý pro  $x > 0$ , to přímo odpovídá vzorečku pro derivaci funkce  $\ln x$ . Platnost pro  $x < 0$  si ukažme:

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x, \quad (\ln |x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1, \quad J = (-\infty, \infty).$
- $\int e^x dx = e^x + C, \quad J = (-\infty, \infty).$
- $\int \cos x dx = \sin x + C, \quad J = (-\infty, \infty).$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad J = (-\infty, \infty).$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad J$  může být každý interval, který neobsahuje liché násobky  $\frac{\pi}{2}$ , tedy například  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C, \quad J$  může být každý interval, který neobsahuje násobky  $\pi$ , tedy například  $(0, \pi).$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad J = (-\infty, \infty).$

Z pravidel pro derivování součtu a rozdílu dvou funkcí můžeme odvodit také podobné vlastnosti integrálu (za předpokladu existence všech přítomných integrálů).

- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (J \text{ závisí na } f),$
- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, \quad (J \text{ závisí na } f \text{ a } g).$

## 2.2 Úlohy na přímou integraci

**Úloha 2.6.** Určete  $\int \frac{5x^2 - 3}{\sqrt{x}} dx$ .

*Řešení.* Pomocí výše uvedených pravidel a základních vzorců vypočteme

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2 - 3}{\sqrt{x}} dx &= \int \left( \frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = 5 \int x^{2-\frac{1}{2}} dx - 3 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 5 \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{5}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2\sqrt{x^5} + 6\sqrt{x} + C,\end{aligned}$$

kde maximální  $J = (0, \infty)$  (i když jsou výsledné funkce definovány na  $[0, \infty)$ ), jako primitivní funkce jejich definiční obor musí být podmnožinou definičního oboru integrované funkce, což je právě  $(0, \infty)$ .  $\square$

**Úloha 2.7.** Určete  $I = \int \frac{3^x \cos^2 x - 5}{\cos^2 x} dx$ .

*Řešení.* Pomocí výše uvedených pravidel a základních vzorců vypočteme

$$\int \frac{3^x \cos^2 x - 5}{\cos^2 x} dx = \int 3^x dx - 5 \int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = \frac{3^x}{\ln 3} - 5 \operatorname{tg} x + C,$$

kde  $J$  je jakýkoli interval, který neobsahuje liché násobky  $\frac{\pi}{2}$ , tedy například  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .  $\square$

## 2.3 Integrace podle složitějších vzorců

V matematické literatuře existuje celá řada více či méně složitých vzorců pro integraci různých funkcí.

**Úloha 2.8.** Našel jsem vzorec

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$$

*Jak mu rozumíte? Pro jaké hodnoty proměnné  $x$  platí?*

*Vypočtěte s jeho pomocí*

$$\int \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}} dx.$$

*Řešení.* Zřejmě musí být  $a^2 - x^2 > 0$ , a tak  $x \in (-a, a)$ .

Z porovnání zadání se vzorcem vyplývá, že  $a^2 = 3$ , tudíž  $a = \sqrt{3}$ . Dosažením do vzorce dostáváme:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C, \quad J = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

□

**Úloha 2.9.** Pomocí obecnějšího vzorce

$$\int \frac{x dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{b}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} - \frac{1}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} \right] + C, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$$

vypočtete

$$\int \frac{x dx}{(2x+3)^5}.$$

*Řešení.* Nejprve si stanovíme parametry a podmínky:

$$a = 2, \quad b = 3, \quad n = 5, \quad 2x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{3}{2}.$$

Nyní dosadíme:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(2x+3)^5} &= \frac{1}{2^2} \left[ \frac{3}{(5-1)(2x+3)^{5-1}} - \frac{1}{(5-2)(2x+3)^{5-2}} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{4(2x+3)^4} - \frac{1}{3(2x+3)^3} \right] + C, \end{aligned}$$

kde  $J = (-\infty, -\frac{3}{2})$  nebo  $J = (-\frac{3}{2}, \infty)$ .

□

## 2.4 Integrace metodou per partes

Z pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí se dá odvodit metoda nazvaná *integrace per partes*.

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' &= u'v + uv' \implies uv' = (u \cdot v)' - u'v \implies \\ \int uv' dx &= \int (u \cdot v)' dx - \int u'v dx = uv - \int u'v dx. \end{aligned}$$

Problém výpočtu integrálu na levé straně, tedy  $\int uv' dx$ , můžeme převést na problém výpočtu  $u'$ ,  $v$  a integrálu na pravé straně, tedy  $\int u'v dx$ .

Použití této metody si ukážeme na příkladech.

**Úloha 2.10.** *Metodou per partes vypočtete*

$$\int x \cos x \, dx.$$

*Řešení.* Dílčí funkce  $u$  a  $v'$  si musíme vhodně zvolit. Zde se nám bude hodit volba  $u = x$  a  $v' = \cos x$ , neboť derivací  $x$  dostaneme konstantu 1 a  $\cos x$  umíme zintegrovat:

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= \left[ \begin{array}{l} u = x \quad v' = \cos x \\ u' = 1 \quad v = \sin x \end{array} \right] = x \sin x - \int 1 \sin x \, dx \\ &= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C, \end{aligned}$$

kde  $J = (-\infty, \infty)$ . □

V následující úloze budeme muset metodu per partes použít dvakrát. U úloh tohoto typu, tedy

$$\int x^n \cos x \, dx, \quad \int x^n \sin x \, dx \quad \text{či} \quad \int x^n e^x \, dx,$$

se každým jejím použitím sníží o jedničku mocnina  $x$ .

**Úloha 2.11.**  $\int x^2 \cos x \, dx$ .

*Řešení.*

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= \left[ \begin{array}{l} u = x^2 \quad v' = \cos x \\ u' = 2x \quad v = \sin x \end{array} \right] = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx = \left[ \begin{array}{l} u = x \quad v' = \sin x \\ u' = 1 \quad v = -\cos x \end{array} \right] \\ &= x^2 \sin x - 2 \left[ x(-\cos x) - \int 1(-\cos x) \, dx \right] \\ &= x^2 \sin x - 2 \left[ -x \cos x + \int \cos x \, dx \right] \\ &= x^2 \sin x - 2 \left[ -x \cos x + \sin x \right] + C \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C, \end{aligned}$$

kde opět  $J = (-\infty, \infty)$ . □



Metodou per partes se dají integrovat i další typy funkcí.

**Úloha 2.12.**  $I = \int \operatorname{tg}^2 x \, dx$ .

*Řešení.*

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \, dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \left[ \begin{array}{ll} u = \sin^2 x & v' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ u' = 2 \sin x \cos x & v = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{array} \right] \\ &= \sin^2 x \frac{\sin x}{\cos x} - \int 2 \sin x \cos x \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 2 \int \sin^2 x \, dx = \left[ \int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C \right] \\ &\quad \text{(viz následující úlohu 2.13)} \\ &= \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 2 \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C = \frac{\sin^3 x}{\cos x} - x + \sin x \cos x + C, \end{aligned}$$

kde otevřený interval  $J$  volíme tak, aby neobsahoval žádné nulové body funkce  $\cos x$  (čísla tvaru  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ), tedy například  $J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .  $\square$

A postup nemusí být vždy takový přímočarý.

**Úloha 2.13.**  $I = \int \sin^2 x \, dx$ .

*Řešení.*

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \left[ \begin{array}{ll} u = \sin x & v' = \sin x \\ u' = \cos x & v = -\cos x \end{array} \right] \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Máme tedy barevně vyznačenou rovnost

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx,$$

ze které si můžeme hledaný integrál snadno vyjádřit:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C.$$

□