KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 2,

Neurčitý integrál 2

24. února 2016

(Neúplný text)

1 Substituční metoda integrace

Věta 1.1 (1. substituční metoda)**.** *Předpokládejme, že funkce* $\omega : (a,b) \to (A,B)$ *má derivaci všude v* (a,b) *a že funkce* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *má tvar*

$$f = (g \circ \omega) \cdot \omega',$$

kde $g : (A,B) \to \mathbb{R}$*. Pak platí:*

Je-li G *funkce primitivní ke* g *v* (A,B)*, je funkce* $G \circ \omega$ *funkce primitivní k* f *v* (a,b)*.*

Věta 1.2 (2. substituční metoda)**.** *Nechť* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *a nechť* $\omega : (\alpha,\beta) \to_{na} (a,b)$ *(tzn., že* $\omega(\alpha,\beta) = (a,b)$*) splňuje všude v* (α,β) *podmínku* $0 \neq \omega' \neq \pm\infty$*. Pak platí*

Je-li G *funkce primitivní ke* $g := (f \circ \omega)\omega'$ *v* (α,β)*, je funkce* $F := G \circ \omega^{-1}$ *funkce primitivní k* f *v* (a,b)*.*

2 Úlohy na jednoduché substituce

2.1 Lineární substituce $u = ax + b$

Úloha 2.1. $I = \displaystyle\int \Big(\cos(2x-3) + \sin(x+5)\Big)\,\mathrm{d}x.$

Řešení. $I = \displaystyle\int \Big(\cos(2x-3) + \sin(x+5)\Big)\,\mathrm{d}x = \int \cos(2x-3)\,\mathrm{d}x + \int \sin(x+5)\,\mathrm{d}x =$

$$\left[\begin{array}{c|c} u = 2x-3 & v = x+5 \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}u}{2} = \mathrm{d}x & \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \cos(u)\mathrm{d}u + \int \sin(v)\mathrm{d}v =$$

$$\frac{1}{2}\sin(u) - \cos(v) + C = \frac{1}{2}\sin(2x-3) - \cos(x+5) + C. \qquad \square$$

2.1.1 Další jednoduché substituce

Úloha 2.2. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1}$.

Řešení. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1} = \begin{bmatrix} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = u \, \mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}u}{u} = \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{u}}{u-1} = \int \frac{1}{u(u-1)} \mathrm{d}u =$

$-\int \frac{-1}{u(u-1)} \mathrm{d}u = -\int \frac{-u+u-1}{u(u-1)} \mathrm{d}u = -\int \frac{(-u)+(u-1)}{u(u-1)} \mathrm{d}u =$

$-\int \left(-\frac{u}{u(u-1)} + \frac{u-1}{u(u-1)} \right) \mathrm{d}u = -\int \left(-\frac{1}{u-1} + \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u =$

$\int \frac{1}{u-1} \mathrm{d}u - \int \frac{1}{u} \mathrm{d}u = \ln |u-1| - \ln |u| + C =$

$\ln |\mathrm{e}^x - 1| - \ln |\mathrm{e}^x| + C = \ln |\mathrm{e}^x - 1| - \ln \mathrm{e}^x + C = \ln |\mathrm{e}^x - 1| - x + C.$ □

Úloha 2.3. $I = \int \frac{x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Řešení. $I = \int \frac{x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{bmatrix} u = x^2 - a^2 \\ \mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}u}{2} = x \, \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}u =$

$\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 - a^2} + C.$ □