KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 3,

Určitý integrál 1

2. března 2016

1 Newtonův integrál

Definice 1.1 (Zobecněná primitivní funkce)**.** *Nechť*

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

a nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body a a b. Říkáme, že F je zobecněnou primitivní funkcí funkce f v intervalu I, je-li funkce F spojitá v I a platí-li rovnost $F' = f$ všude v $I - K$, kde $K \subset I$ je nějaká konečná množina.

- Zde (na rozdíl od primitivní funkce) nemusí být jen otevřený interval (a, b), ale i $[a, b)$, $(a, b]$ nebo $[a, b]$. Takže zde můžeme uvažovat jednostrannou spojitost a derivace v krajních bodech, pokud do intervalu patří.
- Na otevřeném intervalu (a, b) je každá primitivní funkce také zobecněnou primitivní funkcí.

Definice 1.2 (Přírůstek funkce)**.** *Nechť F je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Hodnotu*

$$F(b) - F(a)$$

budeme nazývat přírůstkem funkce F na intervalu $[a, b]$.

Tento pojem se dá zobecnit následovně:

Definice 1.3 (Zobecněný přírůstek funkce)**.** *Nechť*

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

a nechť F je funkce spojitá na otevřeném intervalu (a, b). Hodnotu

$$[F]_a^b = [F(x)]_a^b := F(b-) - F(a+) = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

budeme nazývat zobecněným přírůstkem funkce F na intervalu (a, b).

- V případě, že $F(a+)$ a $F(b-)$ jsou konečné limity, tak říkáme, že zobecněný přírůstek $[F(x)]_a^b$ má smysl.
- V opačném případě (kdy alespoň jedna z limit je nekonečná nebo neexistuje) říkáme, že zobecněný přírůstek $[F(x)]_a^b$ nemá smysl.

Definice 1.4 (Newtonův integrál)**.** *Předpokládejme, že:*

1. *I je interval s krajními body a a b, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$,*
2. *F je zobecněná primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b)*
3. *a zobecněný přírůstek $[F(x)]_a^b$ má smysl.*

Potom Newtonův integrál funkce f přes interval I s krajními body $a < b$ definujeme rovností

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b.$$

Symbolu vlevo se též říká (Newtonův, určitý) integrál funkce f od a do b, číslo a resp. b je tzv. dolní resp. horní mez integrálu. Funkce f se nazývá integrand nebo integrovaná funkce, interval I je integrační obor, x je integrační proměnná.

Abychom měli základní představu, kdy tento integrál určitě existuje:

Věta 1.5 (Základní věta o existenci integrálu)**.** *Je-li funkce f spojitá a omezená v omezeném intervalu (a, b), integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.*

Úloha 1.6.

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = -(-1) - (-(1)) = 2.$$

Úloha 1.7.

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -2.$$

Úloha 1.8 (Integrovaná funkce není spojitá, ale je omezená)**.**

$$\int_0^1 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = [|x|]_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

Úloha 1.9 (Integrovaná funkce není definovaná v 0 a není omezená)**.** *Při označení z první přednášky máme*

$$\int_{-\mathrm{e}}^1 \ln|x|\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-\mathrm{e}}^1 = -1.$$

Úloha 1.10 (Nekonečná horní mez).

$$\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1.$$

Úloha 1.11 (Existuje).

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln|1+\sin x|\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \Big[\ln(1+\sin x)\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \cdots.$$

Úloha 1.12 (Neexistuje).

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

neexistuje, protože na tomto intervalu neexistuje příslušná zobecněná primitivní funkce. Problém je v bodě $x = \frac{3}{2}\pi$, *kde má funkce* $F(x) = \ln(1+\sin x)$ *neodstranitelnou nespojitost.*

Úloha 1.13 (Integrál s parametrem). *Ukažte, že* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$, *pro všechna* $\alpha < 1$, *zatímco pro žádné* $\alpha \geq 1$ *tento integrál neexistuje.*

Úloha 1.14 (Integrál s parametrem a nekonečnou horní mezí). *Ukažte, že* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$, *pro všechna* $\alpha > 1$, *zatímco pro žádné* $\alpha \leq 1$ *tento integrál neexistuje.*

Úloha 1.15 (Integrály sice existují, ale neumíme je vypočíst). $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}$ *a* $\displaystyle\int_0^1 \cos\frac{1}{x}$.

1.1 Vlastnosti Newtonova integrálu

Věta 1.16 (Linearita integrálu vzhledem k integrované funkci). *Pro libovolné reálné konstanty* k_1, k_2 *je*

$$\int_a^b (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x))\,\mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

existují-li integrály vpravo. (Funkcí a konstant může být lobovolný konečný počet.)

Věta 1.17 (Monotonie integrálu). *Je-li na* (a,b) $f(x) < g(x)$, *potom také*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

existují-li oba integrály.

Věta 1.18 (Aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru)**.** *Je-li c takové, že $a < c < b$, potom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

má-li jedna strana této rovnosti smysl. (Takových dělicích bodů může být libovolný konečný počet.)

Úloha 1.19 (Využití aditivity integrálu)**.** *Vypočtěte* $\int_0^2 (|x-1|+3)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Absolutní hodnota má jediný nulový bod $x = 1$, který spadá do integračního oboru:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (|x-1|+3)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (-(x-1)+3)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 ((x-1)+3)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (-x+4)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x+2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^2}{2}+4x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2 \\
&= \left(-\frac{1^2}{2}+4\cdot 1\right) - (0) + \left(\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right) \\
&= 3{,}5 + 3{,}5 = 7.
\end{aligned}$$

□

Úloha 1.20 (Využití aditivity integrálu)**.** *Vypočtěte* $I = \int_{-3}^2 |x-1| - 2\,x\,|x+2|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Pro integraci výrazů s absolutní hodnotou rozdělíme na intervaly:

x	$\langle -3,-2\rangle$	$\langle -2,1\rangle$	$\langle 1,2\rangle$
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	$1-x$	$x-1$
$\lvert x+2\rvert$	$-(x+2)$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x-1\rvert - 2\,x\,\lvert x+2\rvert$	$1-x+2x(x+2)$	$1-x-2x(x+2)$	$x-1-2x(x+2)$
po úpravě	$2x^2+3x+1$	$-2x^2-5x+1$	$-2x^2-3x-1$

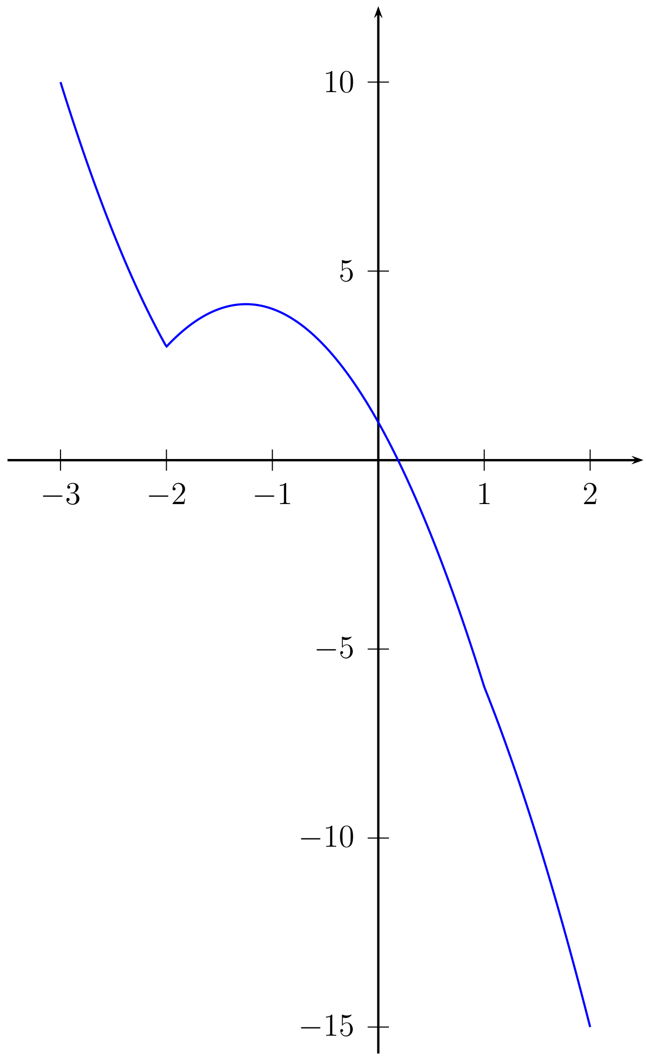
Po rozdělení na tři integrály a dosazení dostaneme:

$$I = \int_{-3}^{-2} (2x^2 + 3x + 1)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 5x + 1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (-2x^2 - 3x - 1)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní již provedeme výpočet:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-3}^{-2} (2x^2 + 3x + 1)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 5x + 1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (-2x^2 - 3x - 1)\,\mathrm{d}x = \\
&= \Big[(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x\Big]_{x=-3}^{-2} + \Big[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\Big]_{x=-2}^{1} + \Big[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x\Big]_{x=1}^{2} = \\
&= \left[\left(\frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 + (-2)\right) - \left(\frac{2}{3}(-3)^3 + \frac{3}{2}(-3)^2 + (-3)\right)\right] + \\
&\quad + \left[\left(-\frac{2}{3}1^3 - \frac{5}{2}1^2 + 1\right) - \left(-\frac{2}{3}(-2)^3 - \frac{5}{2}(-2)^2 + (-2)\right)\right] + \\
&\quad + \left[\left(-\frac{2}{3}2^3 - \frac{3}{2}2^2 - 2\right) - \left(-\frac{2}{3}1^3 - \frac{3}{2}1^2 - 1\right)\right] = \\
&= \left[\left(-\frac{16}{3} + 6 - 2\right) - \left(-18 + \frac{27}{2} - 3\right)\right] + \left[\left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 1\right) - \left(\frac{16}{3} - 10 - 2\right)\right] + \\
&\quad + \left[\left(-\frac{16}{3} - 6 - 2\right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{2} - 1\right)\right] = \\
&= \frac{-16 - 2 - 16 - 16 + 2}{3} + \frac{-27 - 5 + 3}{2} + (4 + 21 + 1 + 12 - 8 + 1) = \\
&- -\frac{48}{3} - \frac{29}{2} + 31 = -16 - 14 - \frac{1}{2} + 31 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$



Obrázek 1: Graf funkce $y = |x-1| - 2\,x\,|x+2|$.