

KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 4,

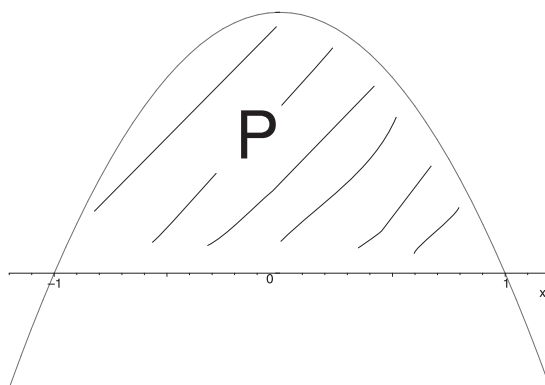
Určitý integrál 2

9. března 2016

1 Aplikace určitého integrálu

1.1 Počáteční úvahy o výpočtu obsahu geometrických útvarů v rovině

Úloha 1.1. *Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = 1 - x^2$ a osou x .*



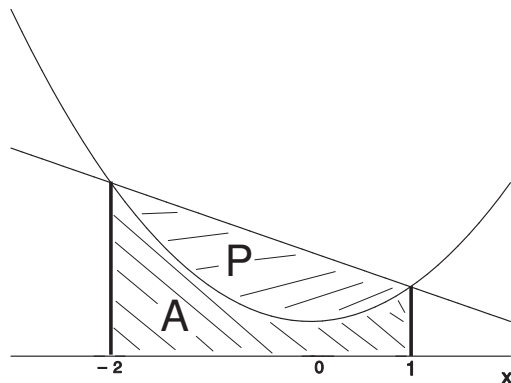
Řešení. Po načrtnutí grafu zjistíme, že jde vlastně o úlohu na výpočet určitého integrálu (dotčený graf paraboly leží nad osou x), u které ale nejprve musíme nalézt integrační meze. Jde o průsečíky paraboly s osou x , tedy nulové body:

$$y = 1 - x^2 = 0, \quad x^2 = 1 \quad \implies \quad x_1 = a = -1, \quad x_2 = b = 1.$$

$$P = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^1 = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \text{ [j}^2\text{]}.$$

□

Úloha 1.2. Vypočtete obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 + 1$ a přímkou $y = 3 - x$.



Řešení. Z obrázku je zřejmé, že meze pro výpočet najdeme jako x -ové souřadnice průsečíků obou grafů, tedy z rovnice:

$$x^2 + 1 = 3 - x, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad x_1 = a = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2, \quad x_2 = b = 1.$$

Dále z obrázku víme, že

$$A = \int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{x=-2}^1 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} + 2 = 6 [j^2]$$

a

$$A + P = \int_{-2}^1 (3 - x) dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_{x=-2}^1 = 3 - \frac{1}{2} + 6 + 2 = \frac{21}{2} [j^2].$$

A tedy dohromady:

$$P = (A + P) - A = \frac{21}{2} - 6 = \frac{9}{2} [j^2].$$

□

1.2 Aplikace určitého integrálu v geometrii

Vzorce pro obsah a délku

	Obsah	Délka křivky
Explicitně	$\int_a^b f(x) dx$	$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$
Parametricky	$\left \int_\alpha^\beta y dx \right = \left \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t) dt \right $	$\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$
Polárně	$\frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi$	$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi$

Plocha rovinných obrazců

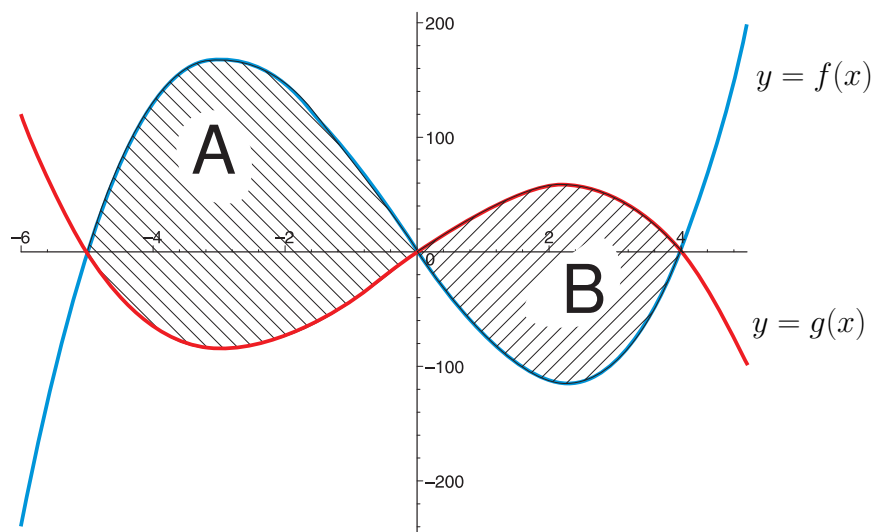
Úloha 1.3. Grafy funkcí f a g vymezily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočítejte obsah této plochy, jestliže:

$$f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 80x, \quad g(x) = -2x^3 - 2x^2 + 40x.$$

Řešení. Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

Průsečíky: $f(x) = g(x) \implies x_1 = -5, x_2 = 0, x_3 = 4.$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:



Ze znalosti vzájemné velikosti $f(x)$ a $g(x)$ na intervalech $\langle -5, 0 \rangle$ a $\langle 0, 4 \rangle$ dostaneme plochy oblastí A a B :

$$P = P_A + P_B = \int_{-5}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^4 (g(x) - f(x)) dx,$$

pokud bychom neznali jejich uspořádání, stačí vzít:

$$P = P_A + P_B = \left| \int_{-5}^0 (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_0^4 (f(x) - g(x)) dx \right|,$$

nebo dokonce

$$P = \int_{-5}^4 |f(x) - g(x)| dx.$$

Pro konečný výpočet použijeme prostřední vztah:

$$\begin{aligned} \int (f(x) - g(x)) dx &= \int \left((4x^3 + 4x^2 - 80x) - (-2x^3 - 2x^2 + 40x) \right) dx \\ &= \int (6x^3 + 6x^2 - 120x) dx = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_{-5}^0 (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_0^4 (f(x) - g(x)) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2 \right]_{-5}^0 \right| + \left| \left[\frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2 \right]_0^4 \right| \\ &= \left| \frac{1625}{2} \right| + |-448| = \frac{2521}{2}. \end{aligned}$$

□

Úloha 1.4. Vypočtete obsah kruhu o poloměru r .

Řešení. Kruh budeme uvažovat jako rovinný útvar ohraničený kružnicí o poloměru r se středem v počátku. Využijeme její parametrický zápis

$$x = \varphi(t) = r \cos t,$$

$$y = \psi(t) = r \sin t,$$

kde $t \in [\alpha, \beta] = [0, 2\pi]$.

Nyní tedy podle vzorce

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y dx \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt \right|$$

vypočteme obsah kruhu. Ještě si to zjednodušíme tak, že si jej vyjádříme jako čtyřnásobek obsahu čtvrtkruhu ($t \in [0, \pi/2]$):

$$\begin{aligned} P &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin t [r(-\sin t)] dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= 4r^2 \left[\frac{t - \sin t \cos t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4r^2 \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{0 - \sin 0 \cos 0}{2} \right) \\ &= \pi r^2. \end{aligned}$$

□

Délka oblouku (křivky)

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Úloha 1.5. Určete délku kružnice o poloměru r

$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t, \end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi].$

Řešení. [$2\pi r$]

□

Objem tělesa

Pomocí Riemannova integrálu funkce jedné proměnné lze počítat objemy ve dvou případech.

- a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$, $x = b$ a známe funkci $P(x)$, jejíž hodnoty znamenají obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose x .

Element objemu je

$$\Delta V = P(x) \cdot \Delta x, \quad \text{tj.} \quad dV = P(x) \cdot dx,$$

a objem tělesa je

$$V = \int_a^b P(x) dx.$$

- b) Rotační těleso, kde osou rotace je osa x a které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$. Zde je řezem kruh o obsahu $\pi[f(x)]^2$ a platí

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Úloha 1.6. *Vypočtěte objem koule o poloměru r .*

Řešení. $[\frac{4}{3}\pi r^3]$

□

Povrch rotační plochy

Jde o plochy vzniklé rotací křivky l kolem osy x . Element povrchu plochy je

$$\Delta S = 2\pi y \Delta s,$$

takže diferenciál povrchu plochy je

$$dS = 2\pi y ds.$$

Je-li křivka l dána parametricky:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

je-li křivka l dána explicitně:

$$y = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Úloha 1.7. *Vypočtěte povrch koule o poloměru r .*

Řešení. $[4\pi r^2]$

□

Cvičení

Úloha 1.8. Vypočtete obsah konečného rovinného útvaru ohraničeného grafy funkcí

$$f(x) = e^x \quad a \quad g(x) = e^{-x} \quad a \quad \text{přímku} \quad x = 1.$$

Načrtněte obrázek.

$$\left[e + \frac{1}{e} - 2 \right]$$

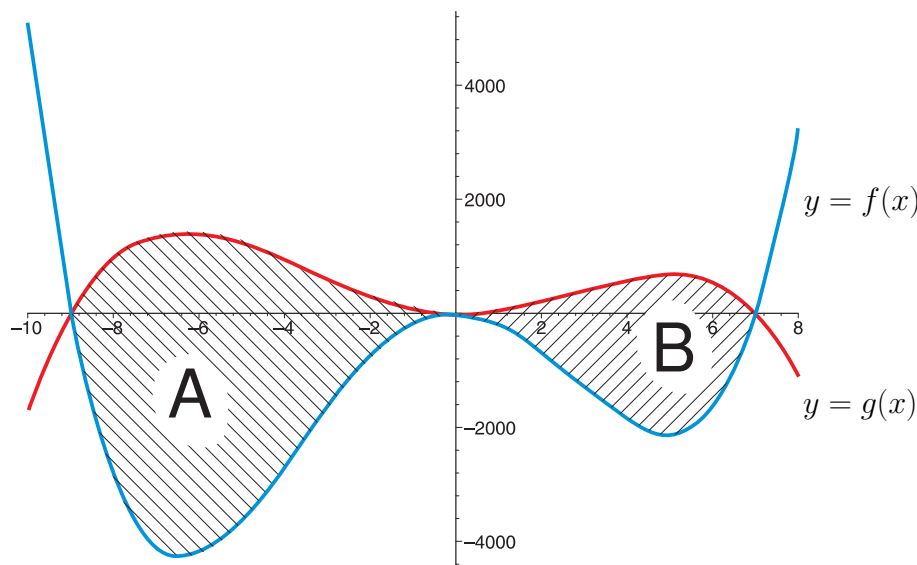
Úloha 1.9 (Cvičení). Grafy funkcí f a g vymežily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočtete obsah této plochy, jestliže:

$$f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 189x^2, \quad g(x) = -x^4 - 2x^3 + 63x^2.$$

Řešení. Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

$$\text{Průsečíky: } f(x) = g(x) \implies x_1 = -9, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 7.$$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:



Nebudeme hledat uspořádání funkcí na intervalech $\langle -9, 0 \rangle$ a $\langle 0, 7 \rangle$, a přímo vezmeme:

$$P = P_A + P_B = \left| \int_{-9}^0 (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_0^7 (f(x) - g(x)) dx \right|.$$

$$\begin{aligned} \int (f(x) - g(x)) dx &= \int \left((3x^4 + 6x^3 - 189x^2) - (-x^4 - 2x^3 + 63x^2) \right) dx \\ &= \int (4x^4 + 8x^3 - 252x^2) dx = \frac{4}{5}x^5 + 2x^4 - 84x^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \left| \int_{-9}^0 (f(x) - g(x)) \, dx \right| + \left| \int_0^7 (f(x) - g(x)) \, dx \right| \\
&= \left| \left[\frac{3}{2} \frac{4}{5} x^5 + 2x^4 - 84x^2 \right]_{-5}^0 \right| + \left| \left[\frac{4}{5} x^5 + 2x^4 - 84x^2 \right]_0^4 \right| \\
&= \left| -\frac{135594}{5} \right| + \left| -\frac{52822}{5} \right| = \frac{188416}{5}.
\end{aligned}$$

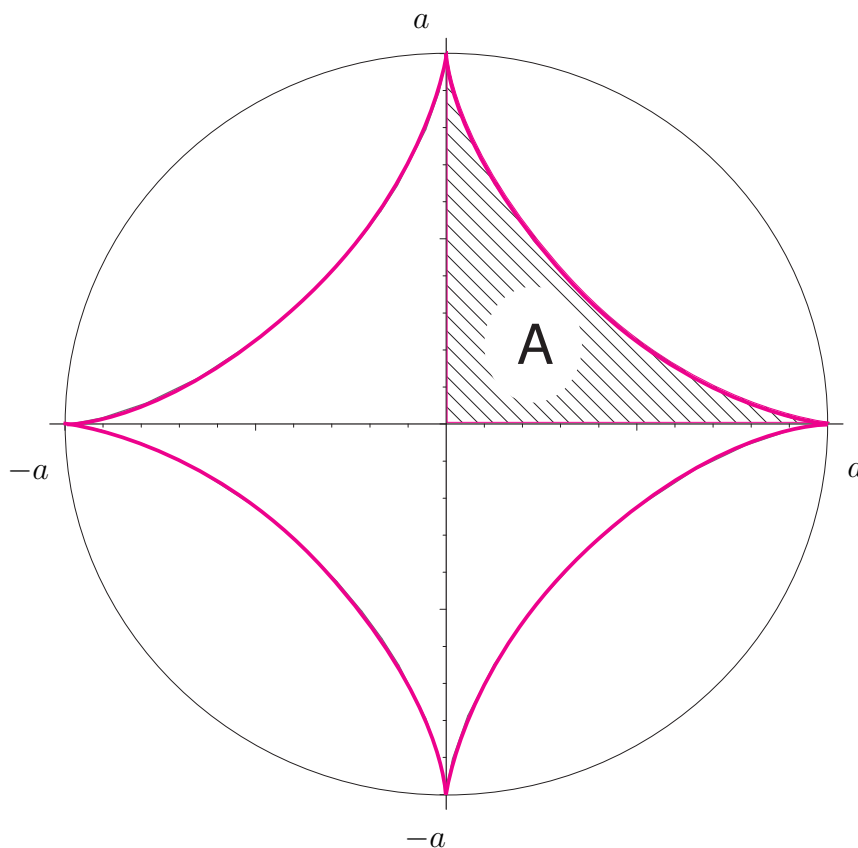
□

Úloha 1.10. *Určete obsah asteroidy*

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Řešení. Máme tedy $x = a \cos^3 t = \varphi(t)$, $y = a \sin^3 t = \psi(t)$, $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Na následujícím obrázku je znázorněna asteroida a postup výpočtu (vyjdeme ze symetrie asteroidy, a tak vypočteme obsah obrazce A jako čtvrtinu obsahu celé asteroidy):



Použijeme vzorec pro výpočet obsahu plochy ohraničené grafem funkce zadané parametricky:

$$\begin{aligned}
 P_A &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} y \, dx \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t) \, dt \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin^3 t)(a3 \cos^2 t(-\sin t)) \, dt \right| \\
 &= \left| -3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t \, dt \right| = \left[\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \sin^2 t \cos^2 t = \frac{\sin^2 2t}{4} \right] \\
 &= \left| -\frac{3}{8}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) \sin^2 2t \, dt \right| = \left| -\frac{3}{16}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)(1 - \cos 4t) \, dt \right| \\
 &= \left| -\frac{3}{16}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t - \cos 2t + \cos 2t \cos 4t) \, dt \right| \\
 &= \left[\cos 2t \cos 4t = \frac{\cos 6t + \cos 2t}{2} \right] \\
 &= \left| -\frac{3}{16}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 4t - \cos 2t + \frac{\cos 6t + \cos 2t}{2} \right) \, dt \right| \\
 &= \left| -\frac{3}{32}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos 2t - 2 \cos 4t + \cos 6t) \, dt \right| \\
 &= \left| -\frac{3}{32}a^2 \left[\left(2t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + \frac{1}{6} \sin 6t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| \\
 &= \left| -\frac{3}{32}a^2 \left(\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 \right) - \left(2 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 \right) \right) \right| \\
 &= \left| -\frac{3}{32}a^2 \pi \right| = \frac{3}{32} \pi a^2
 \end{aligned}$$

A tedy celková plocha asteroidy je

$$P = 4P_A = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

□

Úloha 1.11. *Určete délku oblouku asteroidy*

$$\begin{array}{l}
 x = a \cos^3 t, \\
 y = a \sin^3 t,
 \end{array} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Řešení.

$$x' = -3a \cos^2 t \sin t,$$

$$y' = -3a \cos^2 t \sin t,$$

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= 9a^2 (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t. \end{aligned}$$

$$s = \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t dt = 3a \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a.$$

(Funkce $\sin t$ i $\cos t$ jsou na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ nezáporné, takže po odmocnění není třeba psát absolutní hodnotu.)

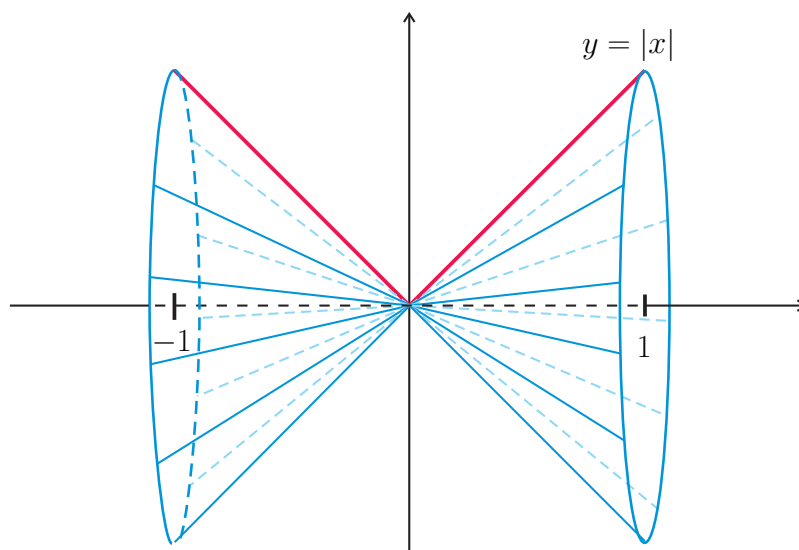
Délka oblouku asteroidy je $s = \frac{3}{2}a.$
--

(Celková délka asteroidy je tedy $4s = 6a.$) □

Úloha 1.12. Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = |x|$ kolem osy x na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Řešení. Vyjdeme ze vzorce pro objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-1}^1 |x|^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^2 dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} [\pi^3].$$

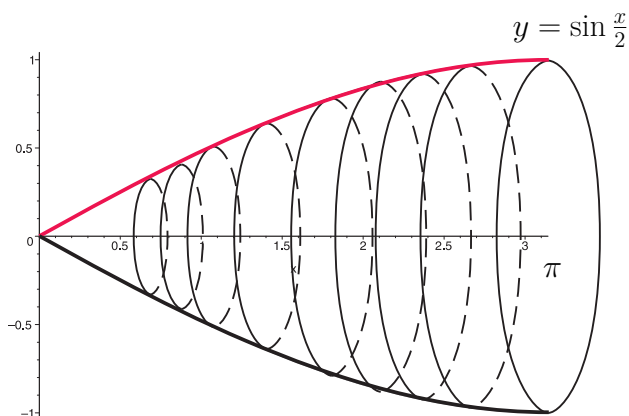


□

Úloha 1.13. Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = \sin \frac{x}{2}$ kolem osy x na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení. Obdobně jako u předchozí úlohy:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 \frac{x}{2} dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{\pi}{2} [x - \sin x]_0^\pi = \frac{\pi}{2} (\pi) = \frac{1}{2} \pi^2 [j^3].$$



□

Úloha 1.14. Vypočtete povrch tělesa vzniklého rotací grafu asteroidy kolem osy x .

Řešení. Ze symetrie asteroidy vyplývá, že celkový povrch získáme jak dvojnásobek povrchu tělesa vzniklého rotací prvního oblouku asteroidy kolem osy x :

$$\begin{aligned} P &= 2 \left(2\pi \int_\alpha^\beta y ds \right) = 2 \left(2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt \right) = \\ &= 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \dots = \frac{12}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

□