KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 5,

Určitý integrál 3

16. března 2016

1 Užití určitého integrálu ve fyzice

Hmotnost a těžiště rovinné desky

Mějme spojitou **kladnou** funkci f a uvažujme rovinnou desku ve tvaru základního obrazce (křivočarého lichoběžníku) pro $x \in \langle a, b\rangle$; nechť $\sigma(x)$ je plošná hustota materiálu (kolik váží čtverečná jednotka rovinné desky).

Je-li deska homogenní, potom $\sigma =$ konst. Hustota se může měnit jen ve směru osy x, ve směru osy y je konstantní.

Hmostnost desky tedy bude záviset na ploše a hustotě:

$$m = \int_a^b \sigma(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Statické momenty desky vzhledem k osám:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x) f^2(x)\,\mathrm{d}x, \qquad M_y = \int_a^b \sigma(x) x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Souřadnice těžiště $T[x_T, y_T]$ rovinné desky:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \sigma(x) x f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sigma(x) f(x)\,\mathrm{d}x}, \\ y_T &= \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x) f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sigma(x) f(x)\,\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Při obecnějším zadání

rovinné desky, kdy je deska ohraničena shora grafem funkce f, zdola grafem funkce g a ze stran přímkami $x = a$ a $x = b$. Taková množina se dá zapsat následovně:

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\right\}.$$

Její hmotnost:

$$m(B) = \int_a^b \sigma(x)\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Statické momenty desky vzhledem k osám:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x)\left[f^2(x) - g^2(x)\right]\mathrm{d}x, \qquad M_y = \int_a^b \sigma(x)x\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Souřadnice těžiště $T[x_T, y_T]$ rovinné desky:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \sigma(x)x\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sigma(x)\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}, \\ y_T &= \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x)\left[f^2(x) - g^2(x)\right]\mathrm{d}x}{\int_a^b \sigma(x)\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Při parametrickém zadání:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

máme těleso ohraničeno grafem, osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha)$ a $x = \varphi(\beta)$.

Její hmotnost:

$$m = \left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Statické momenty desky vzhledem k osám:

$$M_x = \left|\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|, \qquad M_y = \left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Souřadnice těžiště $T[x_T, y_T]$ rovinné desky:

$$
\begin{aligned}
x_T &= \frac{M_y}{m} = \frac{\left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|}{\left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|},\\
y_T &= \frac{M_x}{m} = \frac{\left|\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|}{\left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Úloha 1.1. *Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního horního půlkruhu o poloměru $r > 0$ se středem v počátku.*

Řešení. Využijeme parametrického zadání:

$$
\begin{aligned}
x &= \varphi(t) = r\cos t,\\
y &= \psi(t) = r\sin t,
\end{aligned}
\qquad t \in [0, \pi].
$$

Homogenitu vyjádříme konstantní hustotou:

$$\sigma(t) \equiv c, \quad c > 0.$$

Vypočteme hmotnost:

$$
\begin{aligned}
m &= 2m_{\frac{1}{2}} = 2\left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| = 2\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} c\,r\sin t(r\cos t)'\,\mathrm{d}t\right|\\
&= 2c\,r^2\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right| = 2c\,r^2\left|-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t\right|\\
&= 2c\,r^2\left|-\left[\frac{1}{2}(t - \sin t\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| = 2c\,r^2\left|-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0\right) - 0\right]\right|\\
&= 2c\,r^2\left|-\frac{\pi}{4}\right| = c\frac{\pi\,r^2}{2},
\end{aligned}
$$

tedy plocha půlkruhu krát plošná hustota.

Statický moment vzhledem k ose y by měl vyjít nulový, neboť deska je souměrná podle této osy a současně je homogenní:

$$\begin{aligned}
M_y &= \left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^\pi c\,r\cos t\,r\sin t\,r(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= c\,r^3\left|-\int_0^\pi \sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t\right| = c\,r^3\left|-\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^\pi\right| \\
&= c\,r^3\left|-\frac{1}{3}\,[0-0]\right| = 0.
\end{aligned}$$

Statický moment vzhledem k ose x:

$$\begin{aligned}
M_x &= \left|\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{1}{2}\int_0^\pi c\,r^2\sin^2 t\,r(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{2}c\,r^3\left|\int_0^\pi \sin^2 t(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{2}c\,r^3\left|\int_0^\pi (1-\cos^2 t)(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{2}c\,r^3\left|\left[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^\pi\right| = \frac{1}{2}c\,r^3\left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3}c\,r^3.
\end{aligned}$$

Souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{0}{c\frac{\pi\,r^2}{2}} = 0, \qquad y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{2}{3}c\,r^3}{c\frac{\pi\,r^2}{2}} = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} \doteq 0{,}42\,r.$$

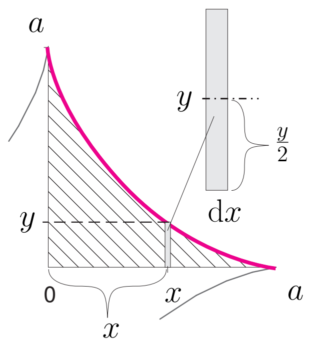
$$[x_T, y_T] = \left[0, \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right].$$

□

Úloha 1.2. *Určete těžiště „prvního kvadrantu“ asteroidy (viz obrázek 1*

Řešení. Z dřívějška víme, že plocha (a tedy i hmotnost při jednotkové plošné hustotě $\sigma(t) \equiv 1$) prvního kvadrantu asteroidy je

$$m = \frac{1}{4}P = \frac{1}{4}\frac{3}{8}\pi a^2 = \frac{3}{32}\pi a^2.$$



Obrázek 1: Výpočet souřadnic těžiště rovinné desky — prvního kvadrantu asteroidy.

A opět ze symetrie

$$x_T = y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\left|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma(t)\psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|}{m} = \frac{\left|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^6 t 3a\cos^2 t(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right|}{\frac{3}{32}\pi a^2} =$$

$$= \frac{\left|\frac{3}{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right|}{\frac{3}{32}\pi a^2} = \frac{16a}{\pi}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2)^3\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t\right| =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \cos t = z \\ -\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}z \\ t=0 \Rightarrow z=1 \\ t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \text{přehození} \\ \text{znaménka} \\ \text{a mezí} \end{array}\right] = \frac{16a}{\pi}\left|\int_0^1 (1-z^2)^3 z^2\,\mathrm{d}z\right| =$$

$$= \frac{16a}{\pi}\left|\int_0^1 \left((1-3z^2+3z^4-z^6)z^2\right)\,\mathrm{d}z\right| = \frac{16a}{\pi}\left|\int_0^1 \left(z^2-3z^4+3z^6-z^8\right)\,\mathrm{d}z\right| =$$

$$= \frac{16a}{\pi}\left|\left[\frac{z^3}{3}-\frac{3z^5}{5}+\frac{3z^7}{7}-\frac{z^9}{9}\right]_0^1\right| = \frac{16a}{\pi}\left|\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right| = \frac{16a}{\pi}\left|\frac{16}{315}\right|$$

$$= \frac{256}{315}\frac{a}{\pi} \doteq 0{,}26\,a.$$

□

Úloha 1.3 (Těžiště podgrafu)**.** *Určete hmotnost a souřadnice těžiště podgrafu funkce $y = 4x(1-x)$, je-li plošná hustota*

a) konstantní $\sigma(x) \equiv 1$,

b) proměnlivá ve směru osy x: $\sigma(x) = x^2$.

Řešení. Jde o úseč paraboly nad osou x na úseku $x \in [0; 1]$.

ad a) Máme tedy funkci $f(x) = 4x(1-x)$, $\sigma = 1$, $a = 0$ a $b = 1$.

Hmotnost homogenního rovinného útvaru:

$$\begin{aligned} m &= \int_a^b \sigma(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 \cdot 4x(1-x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= 4\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4\left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - 0\right] = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dále vypočteme statické momenty:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x) \cdot y^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 1 \cdot [4x(1-x)]^2\,\mathrm{d}x = 8\int_0^1 x^2(1-x)^2\,\mathrm{d}x \\ &= 8\int_0^1 x^2(1 - 2x + x^2)\,\mathrm{d}x = 8\int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right)\,\mathrm{d}x \\ &= 8\left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{15}, \end{aligned}$$

$$M_y = \int_a^b \sigma(x) \cdot xy\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1 \cdot x[4x(1-x)]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Souřadnice těžiště $T[x_T, y_T]$:

Z homogenity a souměrnosti plyne, že $x_T = \frac{1}{2}$. Ověříme

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Dále

$$y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{15}\frac{3}{2} = \frac{2}{5}.$$

Uvažovaná rovinná deska má hmotnost $\frac{2}{3}$ a těžiště $T\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right]$.

ad b) Zde je jediná změna, $\sigma(x) = x^2$. Jinak zůstává $f(x) = 4x(1-x)$, $a = 0$ a $b = 1$.

Hmotnost nehomogenního rovinného útvaru:

$$m = \int_a^b \sigma(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \cdot 4x(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}.$$

Dále vypočteme statické momenty:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x) \cdot y^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \cdot [4x(1-x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{105},$$

$$M_y = \int_a^b \sigma(x) \cdot xy\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^2 \cdot x4x(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{15}.$$

Souřadnice těžiště $T[x_T, y_T]$:

Z nehomogenity plyne, že x_T se oproti homogennímu případu posune doprava. Ověříme

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{3}.$$

Dále

$$y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{8}{105}}{\frac{1}{5}} = \frac{8}{105}\frac{5}{1} = \frac{8}{21}.$$

Uvažovaná rovinná deska má hmotnost $\frac{1}{5}$ a těžiště $T\left[\frac{2}{3}, \frac{8}{21}\right]$.

$\square$

Hmotnost a souřadnice těžiště křivky

Zde je to podobné jako u rovinné desky, jen místo plochy budeme pracovat s délkou.

Explicitně zadaná křivka

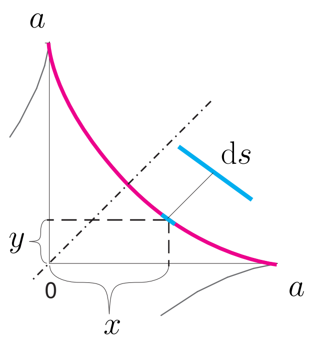
Křivku máme zadánu jako úsek grafu funkce $y = f(x)$ na intervalu $x \in [a, b]$. Dále uvažujeme její délkovou hustotu závislou ne x, tedy $\sigma(x)$.

Její hmotnost bude odpovídat její délce a hustotě:

$$m = \int_a^b \sigma(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Statické momenty:

$$M_x = \int_a^b f(x) \cdot \sigma(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x,$$



Obrázek 2: Grafická ilustrace výpočtu souřadnic těžiště křivky (oblouku). $\mathrm{d}s = \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t$ pro parametricky zadanou křivku a $\mathrm{d}s = \sqrt{\left[1 + \left[f'(x)\right]^2\right.}\,\mathrm{d}x$ pro explicitně zadanou křivku.

$$M_y = \int_a^b x \cdot \sigma(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x \cdot \sigma(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sigma(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x},$$

$$y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sigma(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sigma(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x}.$$

Parametricky zadaná křivka

Uvažujme rovinnou křivku o délkové hustotě $\sigma(t)$ danou parametricky rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \qquad t \in [\alpha, \beta].$$

Pak její hmotnost získáme pomocí následujícího vzorce:

$$m = \int_\alpha^\beta \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Statické momenty:

$$M_x = \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t.$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cdot \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t.$$

A konečně souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_\alpha^\beta \varphi(t) \cdot \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t}{\int_\alpha^\beta \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t},$$

$$y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t}{\int_\alpha^\beta \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t}.$$

Úloha 1.4. *Určete těžiště jednoho oblouku asteroidy.*

Řešení. Z dřívějška víme, že délka (a tedy i hmotnost při jednotkové délkové hustotě) jednoho oblouku asteroidy je

$$m = s = \frac{3}{2}a.$$

Vzhledem k tomu, že uvažovaný oblouk asteroidy leží v prvním kvadrantu a je symetrický vzhledem k ose prvního a třetího kvadrantu (viz obrázek), tak jeho těžiště leží na této ose, takže $y_T = x_T$.

$$\begin{aligned} y_T &= x_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_0^{\pi/2} y\, \mathrm{d}s}{s} = \frac{\int_0^{\pi/2} a \sin^3 t\ 3a \sin t \cos t\, \mathrm{d}t}{\frac{3}{2}a} \\ &= 2a \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\, \mathrm{d}t = 2a \left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = 2a\left(\frac{1}{5} - 0\right) = \frac{2}{5}a\,. \end{aligned}$$

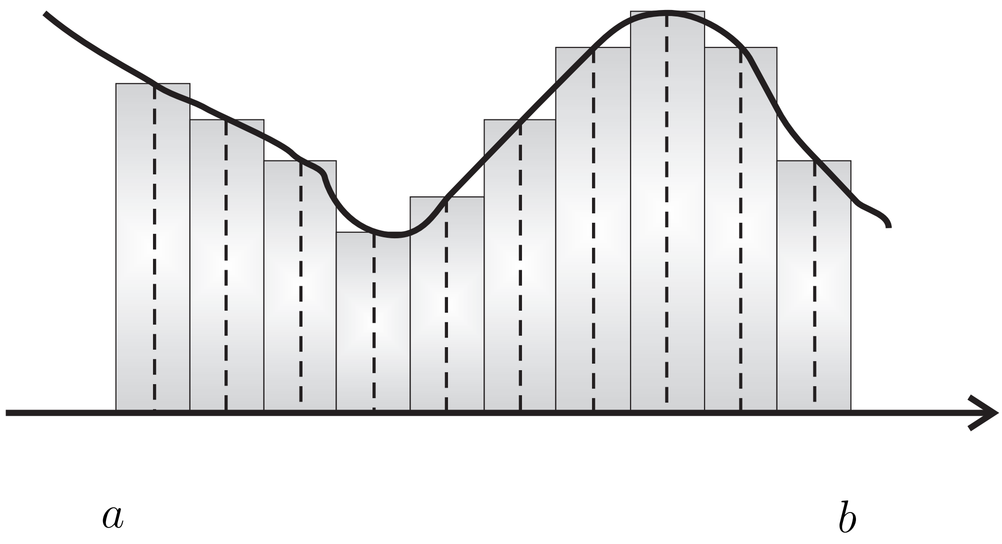
Těžiště prvního oblouku asteroidy tedy leží v bodě $T = \left[\frac{2}{5}a; \frac{2}{5}a\right]$. □

2 Přibližné metody výpočtu Riemannova integrálu

Existuje více přibližných metod, kterými lze provádět výpočet Riemannova integrálu. Označení „přibližná metoda“ není žádnou degradací příslušné metody, neboť zejména s využitím výpočetní techniky lze takto provádět výpočet Riemannova integrálu prakticky s libovolnou přesností. Takže v aplikacích má tento postup stejnou hodnotu a rozsáhlejší uplatnění než klasický výpočet užitím Newtonova vzorce, protože — jak bylo naznačeno již v kapitole ?? — primitivní funkcí ve tvaru pro použití Newtonova vzorce lze získat jen v některých speciálních případech.

Předpokládáme-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$, jde při výpočtu Riemannova integrálu o výpočet obsahu základního obrazce.

Metoda obdélníková



Obrázek 3: Obdélníková metoda

Princip této metody spočívá v tom, že určitý integrál nahradíme vhodným integrálním součtem (tj. s dostatečně jemným dělením a s vhodnými body ξ_i v elementech dělení, viz obr. 3).

Zpravidla volíme dělení na n stejných elementů, tedy délka jednoho elementu (tzv. *krok* h) je

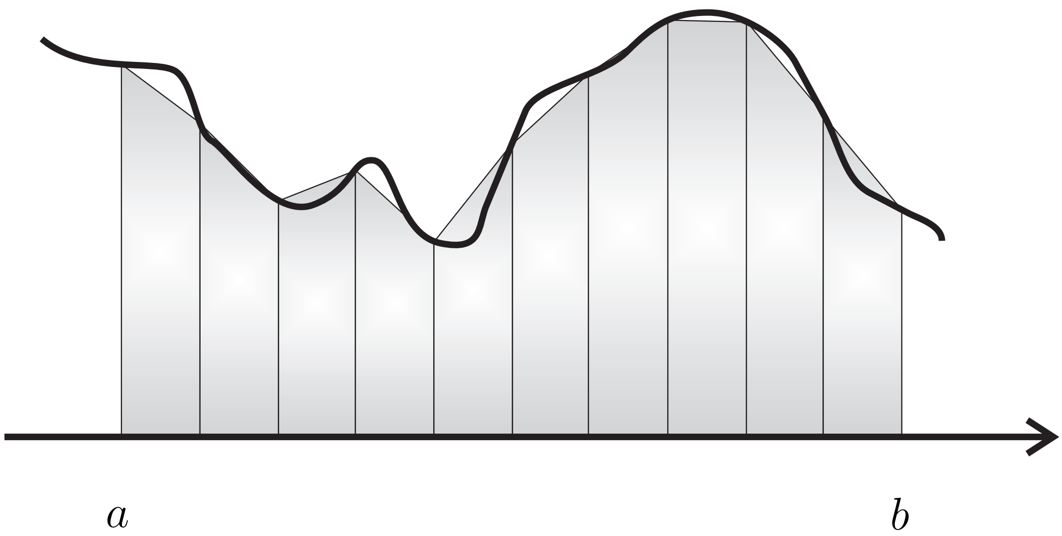
$$h = \Delta x_i = \frac{b-a}{n},$$

za ξ_i volíme středy elementů. Obsah základního obrazce pokládáme přibližně roven integrálnímu součtu, tedy součtu obsahů obdélníků o stranách $f(\xi_i)$ a h. Pro obdélníkovou metodu tak máme vzorec

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

Chybu metody lze stanovit např. užitím horních součtů a dolních součtů (viz 11.1) což je zvlášť jednoduché pro monotónní funkce.

Metoda lichoběžníková



Obrázek 4: Lichoběžníková metoda

Princip této metody spočívá v tom, interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na n stejných elementů a funkci nahradíme lomenou čarou (viz obr. 4). Obsah základního obrazce pak přibližně nahradíme součtem obsahů elementárních lichoběžníků se základnami $f(x_{i-1}), f(x_i)$ a s výškou $h = \dfrac{b-a}{n}$. Tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big[f(x_{i-1}) + f(x_i)\Big] = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2}\right].$$

Metoda Simpsonova

Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na sudý počet $2n$ elementů o šířce $h = \dfrac{b-a}{2n}$. Dělicí body značíme

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \ldots\ x_{2n} = b.$$

Z těchto elementů vytvoříme dvojice elementů o šířce $2h = \dfrac{b-a}{n}$. V každé dvojici (na každém intervalu $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ pak funkci f nahradíme kvadratickou funkcí (která je dané funkci f rovna na krajích a uprostřed (x_{2i+1}) těchto „dvojelementů"), takže k výpočtu obsahu vzniklých „křivočarých lichoběžníků" lze využít Simpsonova vzorce:

$$P = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{2i+2} - x_{2i})\Big[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big].$$

Provedeme-li sčítání přes všechny elementy, dostaneme výslednou formuli pro Simpsonovu metodu:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \approx \quad & \frac{h}{3}\Big\{\Big[f(x_0) + f(x_{2n})\Big] + 2\Big[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n-2})\Big] + \\ & +4\Big[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})\Big]\Big\}.\end{aligned}$$