# KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 6,

# Funkce dvou proměnných

# 23. března 2016

## 1 Funkce dvou (více) proměnných

Širší teorii funkcí více proměnných najdete na adrese
`http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/fceviceprom.html`.

Podstatné části zaměřené na funkce dvou proměnných uvádím zde:

**Definice 1.1.** *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $M \neq \emptyset$. Funkcí dvou proměnných budeme rozumět každé zobrazení*

$$f : M \to \mathbb{R}.$$

*Množinu $M$ nazýváme definičním oborem funkce $f$ a značíme $D(f)$.*

**Poznámka 1.2.**

1. *Pro funkci dvou proměnných volíme značení*

$$z = f(x, y).$$

2. *Proměnné $x$ a $y$ nazýváme nezávisle proměnné, $z$ je závisle proměnná.*
3. *Není-li dán definiční obor, pak se jím rozumí nejširší přípustná množina v $\mathbb{R}^2$.*

**Příklad 1.3.** *Určete definiční obor funkce $z = x^2 + y^2$.*

*Řešení.* Funkce (její předpis) neklade žádná omezení na $x$ a $y$, a tak je

$$D(f) = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

tedy všechny uspořádané dvojice reálných čísel, resp. celá rovina $xy$. $\square$

Další úlohy na určení definičního oboru funkce dvou proměnných najdete na
`homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_4_1.pdf`.

## Parciální derivace

Funkce

$$z = f(x, y)$$

má dvě proměnné. Chceme-li na ni uplatnit definici derivace funkce jedné proměnné, můžeme ji derivovat jen podle jedné proměnné a druhou fixovat (v takovém případě považujeme druhou proměnnou za konstantu).

**Definice 1.4.** *Říkáme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ parciální derivaci podle $x$, jestliže existuje (vlastní) limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

*Podobně říkáme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ parciální derivaci podle $y$, jestliže existuje (vlastní) limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

1. Obvyklé značení pro parciální derivaci funkce $f$ podle $x$ (podle $y$) v bodě $A = [x_0, y_0]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(A), \quad f'_x(x_0, y_0) \qquad \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A), \quad f'_y(x_0, y_0) \right).$$

2. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

   jsou opět funkce proměnných $x$ a $y$, s definičními obory

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \subseteq D(f), \qquad D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \subseteq D(f).$$

3. Při výpočtu parciálních derivací používáme stejná pravidla jako u obyčejných derivací (derivace součtu, součinu, ...).

**Parciální derivace druhého řádu**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

- Smíšené parciální derivace druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Záměnnost smíšených parciálních derivací:

**Věta 1.5.** *Jsou-li smíšené parciální derivace*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad a \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

*spojité v bodě* $A = [x_0, y_0]$, *pak jsou si v tomto bodě rovny:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A).$$

**Příklad 1.6.** *Určete parciální derivace prvního a druhého řádu funkce*

$$f(x, y) = 3x^4 - 2xy + xy^2 + y^6.$$

*Řešení:* Nejprve určíme definiční obor funkce $f$. Zřejmě

$$D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^4 - 2xy + xy^2 + y^6) = 12x^3 - 2y + y^2 + 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^4 - 2xy + xy^2 + y^6) = 0 - 2x + 2xy + 6y^5.$$

Parciální derivace druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(12x^3 - 2y + y^2) = 36x^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-2x + 2xy + 6y^5) = 2x + 30y^4;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-2x + 2xy + 6y^5) = -2 + 2y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(12x^3 - 2y + y^2) = -2 + 2y.$$

Definiční obory:

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \mathbb{R}^2.$$

□

- Řadu dalších úloh najdete na
  `homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_1.pdf`.

## Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Nejprve si lokální extrém funkce dvou proměnných definujeme:

**Definice 1.7** (lokální extrémy)**.** *Řekneme, že funkce*

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$$

*nabývá v bodě $A \in D(f)$* lokálního maxima*, jestliže existuje okolí*

$$\mathcal{O}(A) \subseteq D(f)$$

*bodu $A$ takové, že*

$$\textit{pro všechna} \quad X \in \mathcal{O}(A) \quad \textit{platí} \quad f(X) \leq f(A).$$

*Řekneme, že funkce*

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$$

*nabývá v bodě $A \in D(f)$* lokálního minima*, jestliže existuje okolí*

$$\mathcal{O}(A) \subseteq D(f)$$

*bodu $A$ takové, že*

$$\textit{pro všechna} \quad X \in \mathcal{O}(A) \quad \textit{platí} \quad f(X) \geq f(A).$$

**Definice 1.8** (stacionární bod)**.** *Řekneme, že bod $A \in \mathbb{R}^2$ je stacionárním bodem funkce $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$, jestliže v něm jsou obě parciální derivace prvního řádu funkce $f$ nulové, tedy*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0.$$

Podobně jako u funkce jedné proměnné platí:

**Věta 1.9.** *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$ má v $A$ lokální extrém a nechť $f$ má v $A$ obě parciální derivace.*

*Pak nutně $A$ je stacionárním bodem $f$.*

- Tato věta nevylučuje možnost, že lokální extrém nastane v bodě který není stacionárním, ale nesmí v něm alespoň jedna parciální derivace existovat (pokud ale nějaká existuje, musí být nulová).

**Určování lokálních extrémů funkce dvou proměnných**

- Označme:

$$D_1(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \qquad D_2(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}$$

hlavní determinanty matice parciálních derivací druhého řádu.

Postačující podmínky pro existenci ostrého lokálního extrému funkce $f$ ve stacionárním bodě $A$:

**Věta 1.10.** *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \to \mathbb{R}$ je na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ dvakrát spojitě diferencovatelná. Nechť bod $A$ je její stacionární bod.*

*1) Jestliže*

$$D_2(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)\right)^2 > 0,$$

*pak má funkce $f$ v bodě $A$ ostrý lokální extrém.*

*Je-li navíc*

$$D_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0,$$

*jedná se o* ostré lokální minimum*, je-li*

$$D_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0,$$

*jedná se o* ostré lokální maximum.

- *Je-li $D_2(A) < 0$, potom funkce $f$ v $A$ lokální extrém nemá.*
- *V případě $D_2(A) = 0$ nelze takto o existenci lokálního extrému rozhodnout.*

**Příklad 1.11.** *Určete lokální extrémy funkce*

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

*Řešení:*

1. *Definiční obor:* funkce je definována na celé rovině $xy$, tedy $D(f) = \mathbb{R}^2$.
2. Parciální derivace prvního řádu:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$
Obě parciální derivace jsou definovány a spojité na celé rovině $xy$.
3. *Stacionární body:*
$$2x = 0 \quad \wedge \quad 2y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = [0, 0].$$
4. *Parciální derivace druhého řádu:*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$
Všechny parciální derivace druhého řádu jsou definovány a spojité na celé rovině $xy$.

5. *Hlavní determinanty:*

$$D_1(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \qquad D_2(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

6. *Hodnota hlavních determinantů ve stacionárním bodě $A = [0,0]$:*

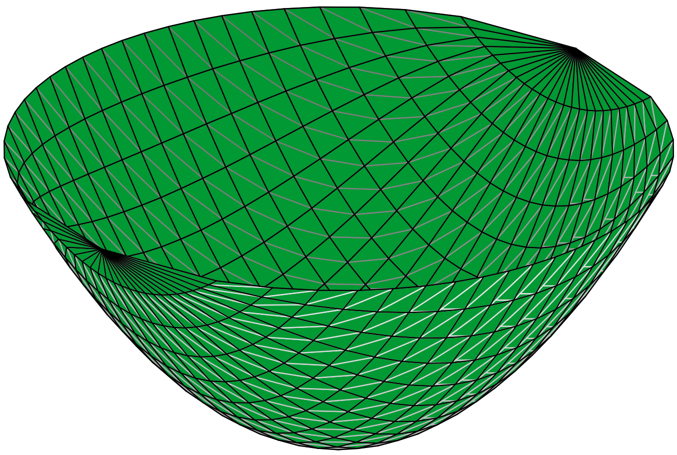
$$D_1(0,0) = 2 > 0, \qquad D_2(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0.$$

7. *Vyhodnocení:*

$$D_2(A) > 0 \quad \wedge \quad D_1(A) > 0,$$

   a tak má funkce $f$ v bodě $A = [0,0]$ ostré lokální minimum o hodnotě $f(A) = f(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$.

8. *Další lokální extrémy (mimo stacionární body):* Vzhledem k tomu, že obě parciální derivace existují v celé rovině, mohou lokální extrémy nastat pouze ve stacionárních bodech, a tak funkce $f$ žádný další lokální extrém nemá.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v okolí bodu $[0,0]$, kde má tato funkce lokální minimum 0.

□

**Příklad 1.12.** *Určete lokální extrémy funkce*

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

*Řešení:* 1. *Definiční obor:* funkce je definována na celé rovině $xy$, tedy $D(f) = \mathbb{R}^2$.

2. Parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou definovány a spojité na celé rovině $xy$, takže lokální extrémy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech funkce $f$.

3. *Stacionární body:*

$$2x = 0 \quad \wedge \quad -2y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = [0,0].$$

4. *Parciální derivace druhého řádu:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.$$

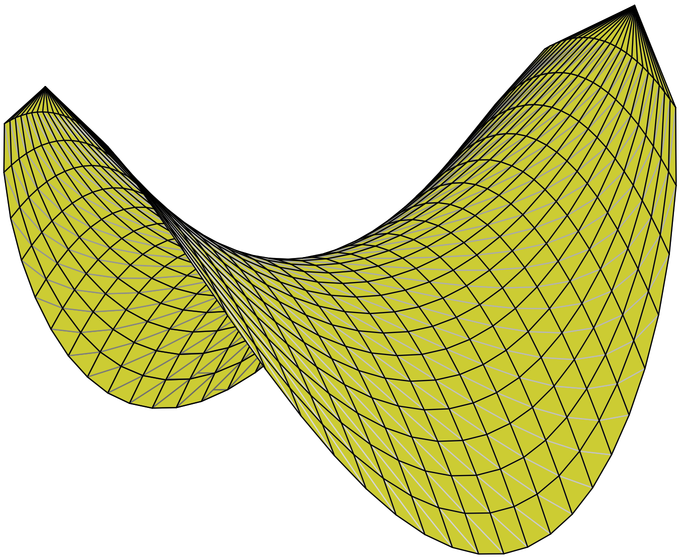
Všechny parciální derivace druhého řádu jsou definovány a spojité na celé rovině $xy$.

5. *Hlavní determinanty:*

$$D_1(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \qquad D_2(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

6. *Hodnota hlavních determinantů ve stacionárním bodě $A = [0,0]$:*

$$D_1(0,0) = 2 > 0, \qquad D_2(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = -4 < 0.$$



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ v okolí bodu $[0, 0]$, kde tato funkce lokální extrém nemá. Plocha má tvar sedla (v jednom směru lokální maximum, ve druhém lokální minimum).

7. *Vyhodnocení:*
$$D_2(A) < 0,$$
a tak funkce $f$ v bodě $A = [0, 0]$ lokální extrém nemá.

   Skutečně, $f(0, 0) = 0$ a v libovolném okolí bodu $A = [0, 0]$ má funkce $f$ jak záporné ($x = 0 \wedge y \neq 0$), tak i kladné hodnoty ($y = 0 \wedge x \neq 0$).

□

**Příklad 1.13.** *Určete lokální extrémy funkce*
$$f(x, y) = x^2 + 6\,|y|\,.$$

*Řešení:* 1. *Definiční obor:* funkce je definována na celé rovině $xy$, tedy $D(f) = \mathbb{R}^2$.

2. Parciální derivace prvního řádu:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} -6, \quad \text{pro } y < 0, \\ \text{neexistuje pro } y = 0, \\ 6, \quad \text{pro } y > 0. \end{cases}$$

Parciální derivace podle $x$ je definována a spojitá na celé rovině $xy$, zatímco parciální derivace podle $y$ neexistuje na přímce $y = 0$ (mimo tuto přímku je v celé rovině definována a spojitá).

Hledání lokálních extrémů budeme tedy provádět různě ve dvou oblastech, na přímce $y = 0$ a mimo ni.

(a) Mimo přímku $y = 0$ obě parciální derivace existují, tudíž zde může nastat lokální extrém pouze ve stacionárním bodě. Vzhledem k tomu, že parciální derivace podle $y$ je zde vždy nenulová (nabývá hodnot $\pm 6$), žádný stacionární bod zde neexistuje, a tak ani lokální extrém.

(b) Na přímce $y = 0$ neexistuje parciální derivace podle $y$, a tak lokální extrémy na ní nemůžeme vyšetřovat standardně podle naší věty. Při analýze chování funkce $f$ na přímce $y = 0$ (a v jejím okolí) budeme postupovat následovně:

   i. Nejprve si uvědomíme, že funkce $f$ je spojitá v celé rovině $xy$.

   ii. Když je v daném bodě parciální derivace podle $x$ nenulová, znamená to, že funkční hodnoty ve směru osy $x$ v daném bodě rostou nebo klesají, a tak zde nemůže být lokální extrém. Když tedy existuje parciální derivace podle $x$, musí být v lokálním extrému nulová. Na přímce $y = 0$ je parciální derivace podle $x$ nulová pouze v bodě $A = [0, 0]$. Jediným kandidátem na lokální extrém je tedy tento bod.

   iii. Vzhledem k tomu, že

$$f(0,0) = 0^2 + 6\,|0| = 0 \qquad \text{a} \qquad f(x,y) > 0 \quad \text{pro } (x,y) \neq (0,0),$$

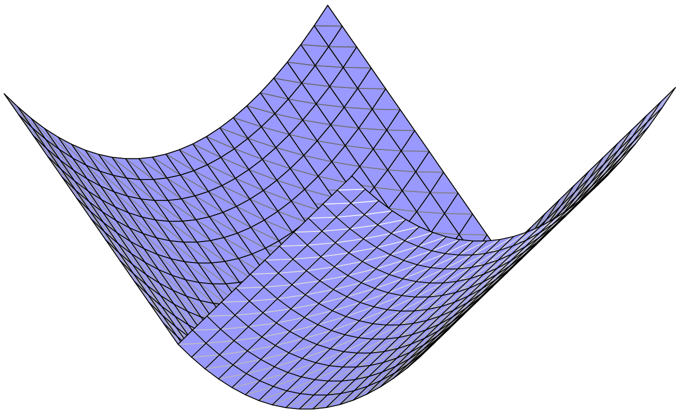
   tak rychle zjišťujeme, že v bodě $[0, 0]$ nabývá funkce $f$ svého lokálního minima 0.

$\square$

- Řadu příkladů (řešených i neřešených s výsledky) najdete na adrese: `homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_6_1.pdf`.

### 1.0.1 Několik příkladů „na lokální extrémy“

Najděte lokální extrémy funkcí:



Obrázek 3: Graf funkce $f(x,y) = x^2 + 6\,|y|$ v okolí bodu $[0,0]$, kde tato funkce má lokální minimum 0. Na přímce $y = 0$ pro funkci $f$ neexistuje její parciální derivace podle proměnné $y$ (ostrý hřbet plochy).

1. $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$ $\left[\text{LMax v } (1,1)\right]$

2. $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ $\left[\text{LMin v } (-2,0)\right]$

3. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\left[\text{LMin v } (0,0)\right]$

4. $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\left[\text{nemá lok. extr.}\right]$

5. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ $\left[\text{LMin v } (1,4)\right]$

6. $f(x,y) = 3\ln\dfrac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$ $\left[\text{LMax v } (6,4)\right]$

7. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ $\left[\text{LMax v } (1,1) \text{ a } (-2,-1)\right]$

8. $f(x,y) = 2y^3 + x^2y + x^2 + 5y^2$ $\left[\text{LMin v } (0,0) \text{ a LMax v } \left(0, \frac{-5}{3}\right)\right]$