KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 8,

Obyčejné diferenciální rovnice 2

6. dubna 2016

*********** Přednáška ***********

1 Existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy

Stále uvažujeme rovnici

$$y' = f(t, y). \tag{1}$$

Budeme předpokládat, že k rovnici (1) existují integrální křivky (grafy řešení) na nějaké množině

$$G = I \times \Omega, \quad I, \Omega \subset \mathbb{R},$$

kde je funkce f definována.

Často nás ve výsledku nebudou zajímat všechna řešení dané úlohy, ale jen taková, která mají požadovanou vlastnost, splňují určitou podmínku.

Přitom je důležité, zda takové řešení vůbec existuje (existence řešení), a když ano, zda jich nemůže být víc ((ne)jednoznačnost řešení).

Takové podmínky mohou být formulovány různě, my se však zaměříme jen na jeden typ.

Cauchyova úloha

Budeme se věnovat tzv. *počáteční podmínce*

$$y(t_0) = y_0, \tag{2}$$

která společně s diferenciální rovnicí (1) tvoří tzv. *Cauchyovu úlohu*, která je základní úlohou v teorii diferenciálních rovnic.

Definice 1.1 (Cauchyova úloha)**.** *Mějme diferenciální rovnici (1) a počáteční podmínku (2).*

Jejich kombinaci, úlohu

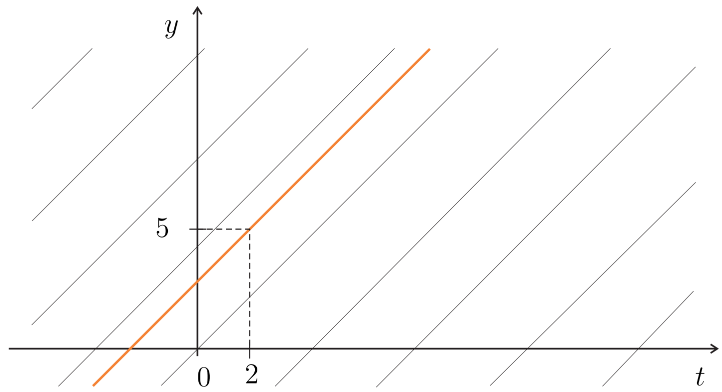
$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0, \ (t_0, y_0) \in G, \end{cases} \tag{3}$$

nazýváme Cauchyova úloha*.*

Za její řešení bereme takové řešení $y = y(t)$ diferenciální rovnice $y' = f(t,y)$, které je definováno na nějakém intervalu J (kde $t_0 \in J$) a splňuje počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$.

Příklad Cauchyovy úlohy je v příkladu 2.3 na straně 12 skript [1]. Integrální křivky z tohoto příkladu představují soustavu navzájem rovnoběžných přímek $y = t + C$, $C \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení dané Cauchyovy úlohy (s počáteční podmínkou $y(2) = 5$) je pak reprezentováno tou přímkou soustavy, která prochází bodem $(2, 5)$.

Vše je znázorněno na obrázku 1.



Obrázek 1: Grafické znázornění řešení (přímky $y = t + C$, $C \in \mathbb{R}$) rovnice $y' = 1$. Zvýrazněno je řešení $y = t + 3$ splňující počáteční podmínku $y(2) = 5$.

Existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy

Postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy můžeme schematicky znázornit následovně:

$$f(t,y) \text{ spojitá na } D \quad \Longrightarrow \quad \textsc{Existence}$$

$$\left.\begin{array}{c} f(t,y) \text{ spojitá na } D \\ + \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ omezená na } D \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \textsc{Existence a jednoznačnost}$$

Obdélník D, který se ve schématu vyskytuje je definován ve skriptech [1] na straně 19, kde je o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy pojednáno podrobněji.

Zde si vystačíme s následující větou, ve které D nahradíme celou rovinou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Věta 1.2. *Nechť pravá strana rovnice (1) splňuje následující dvě podmínky:*

- *je spojitá funkce na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vzhledem k oběma proměnným t a y;*
- *má na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ spojitou a ohraničenou parciální derivaci $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.*

Potom Cauchyova úloha (3) má právě jedno řešení $y = y(t)$ definované na celém $\mathbb{R}$.

Příklad 1.3 ([2])**.** *Ukážeme, že řešení rovnice*

$$y' = t + \cos y$$

s počáteční podmínkou $y(t_0) = y_0$ je definované na celém intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení. Pravá strana je spojitá na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ v obou proměnných t a y a parciální derivace pravé strany vzhledem k y existuje a je ohraničená v celé rovině (t, y), protože

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |0 - \sin y| = |\sin y| \leq 1.$$

Tím jsou splněny předpoklady věty 1.2, a tak podle ní má úloha

$$\begin{cases} y' = t + \cos y, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

právě jedno řešení $y = y(t)$ definované pro $t \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$. □

Ukázku nejednoznačného řešení najdete v příkladu 3.5 skript [1] na straně 20.

2 Vybrané elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

Po prostudování této kapitoly již budete umět rozeznat a vyřešit separovatelnou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu.

Konečně se vám dostane do ruky nástroj (postup) k aktivnímu vyřešení nějaké diferenciální rovnice.

Chceme-li úspěšně řešit diferenciální rovnice, je třeba:

– poznat, jakého typu je zadaná rovnice,

– znát algoritmus řešení tohoto typu rovnic,

– správně zvládnout potřebné výpočetní operace.

Pojďme si tedy představit první typ diferenciálních rovnic, který se naučíme řešit.

2.1 Separace proměnných

Tuto metodu lze užít u tzv. separovatelných rovnic. Ty lze převést na tzv. separovanou rovnici

$$\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \psi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

ve kterém jsou proměnné t a y separovány (odděleny), každá na své straně rovnice.

Uvažujme dále rovnici

$$\Phi(y) = \Psi(t) + C, \tag{5}$$

kde $\Phi(y)$ je funkce primitivní k $\varphi(y)$, $\Psi(t)$ je primitivní k $\psi(t)$ a C je (integrační) konstanta. Jinými slovy, levou stranu rovnice (4) jsme integrovali podle y a pravou stranu podle t, přičemž jsme dvě integrační konstanty nahradili jedinou, umístěnou na pravé straně.

Dá se ukázat (naznačeno je to ve skriptech [1] na straně 22), že funkce $y = u(t)$ je řešením rovnice (4) právě tehdy, když vyhovuje rovnici (5); touto rovnicí lze tedy vyjádřit obecné řešení dané diferenciální rovnice (4).

Vraťme se nyní k naší rovnici $y' = f(t, y)$. Kdy ona bude separovatelná? Zřejmě tehdy, když její pravá strana půjde vyjádřit jako součin, $f(t, y) = g(t)h(y)$:

$$y' = g(t)h(y). \tag{6}$$

Za předpokladu $h(y) \neq 0$ a při vědomí $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ můžeme (6) převést na separovanou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(t)\,\mathrm{d}t, \tag{7}$$

která se již řeší jako (4).

Zbývá vyšetřit podmínku $h(y) \neq 0$. Pokud má rovnice

$$h(y) = 0 \tag{8}$$

nějaké řešení $y = y_0 (\in \mathbb{R})$, potom je konstantní funkce $y \equiv y_0$ řešením (6), neboť po dosazení do (6) postupně dostáváme: $(y_0)' = h(y_0)g(t)$, $0 = 0g(t)$, $0 = 0$ (neboť derivace konstanty na levé straně rovnice je nula).

Za obecné řešení (6) budeme brát obecné řešení (7) doplněné o kořeny (8).

Vše si prakticky ukážeme na následujících příkladu.

Příklad 2.1. *Najdeme obecné řešení rovnice $y' = ty$.*

Řešení. Tato rovnice sice zatím není separovaná, ale je separovatelná, tj. lze v ní separovat proměnné. Vyjádříme-li y' jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, lze rovnici upravit na tvar, kde proměnné jsou již separované:

$$\begin{aligned} y' &= ty, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= ty \quad |: y \neq 0, \ \cdot \mathrm{d}t, \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Získaná rovnice je již separovaná. Získali jsme ji za předpokladu $y \neq 0$. Pokud ho zvlášť prověříme, zjistíme, že jsme tím „přišli“ o nulové řešení

$$y \equiv 0,$$

neboť

$$L = y' = (0)' = 0, \qquad P = ty = t \cdot 0 = 0, \qquad \text{a tedy} \quad L = P \quad \text{pro všechna} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nesmíme zapomenout jej nakonec přidat k ostatním řešením.

Nyní budeme pokračovat v řešení separované rovnice integrací obou stran.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int t\,\mathrm{d}t, \\
\ln|y| &= \frac{t^2}{2} + \ln C_1, \quad C_1 > 0, \\
|y| &= C_1\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}, \\
y &= C_2\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}, \quad C_2 \neq 0, \\
y &= C\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

Kde v posledním kroku jsme přidali nulové řešení. □

3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu (LDR$_{1.ř}$)

Po prostudování této kapitoly budete schopni rozpoznat a vyřešit LDR$_{1.ř}$ metodou variace konstanty.

Výhodou LDR$_{1.ř}$ je jejich jednoduchý tvar a přímočaré řešení.

Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu nazýváme rovnici tvaru

$$y' + p(t)y = f(t). \tag{9}$$

Funkce $f(t)$ se nazývá *pravá strana*. Pokud pravá strana není identicky rovna nule, máme *nehomogenní* LDR$_{1.ř}$ (NHLDR$_{1.ř}$), v opačném případě máme rovnici *homogenní* (HLDR$_{1.ř}$):

$$y' + p(t)y = 0 \tag{10}$$

Budeme předpokládat, že p a f jsou spojité funkce na nějakém intervalu I. Jak je to potom s existencí řešení počáteční úlohy?

Věta 3.1 (O globálnosti řešení $\mathrm{LDR}_{1.ř}$, [2]).
Jestliže jsou funkce p a f spojité na intervalu I, potom úloha

$$\begin{cases} y' + p(t)y = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

kde $t_0 \in I$ a y_0 je libovolné reálné číslo, má jediné řešení $y = y(t)$ na celém intervalu I.

$\mathrm{LDR}_{1.ř}$ jsou velmi důležité. Jednak na ně vede řada významných praktických problémů (chemické reakce, množení bakterií, radioaktivní rozpad, ochlazování těles, ...) a jednak lze některé jiné typy rovnic řešit tak, že je transformujeme na $\mathrm{LDR}_{1.ř}$.

Existuje několik metod, jak řešit $\mathrm{LDR}_{1.ř}$; lze je například řešit i vzorcem.[1] Nejznámější je *metoda variace konstanty.*

Metoda variace konstanty

Tato metoda spočívá ve třech krocích:

1. Nejprve řešíme (separací proměnných) příslušnou rovnici homogenní a obecné řešení zapíšeme s integrační konstantou K.

2. Řešení nehomogenní rovnice hledáme v tomtéž tvaru, kde však $K = K(t)$ je funkce (odsud i název metody: z konstanty „se stane“ funkce). Dosadíme tedy funkci vypočtenou v bodě 1 do dané nehomogenní rovnice a dostaneme rovnici pro neznámou funkci K'.

3. Integrací vypočteme $K(t)$ (s integrační konstantou C) a dosadíme je do funkce vypočtené v kroku 1.

Postup při řešení $\mathrm{LDR}_{1.ř}$ metodou variance konstanty si ukážeme na příkladu.

Příklad 3.2. *Určíme obecné řešení diferenciální rovnice $y' = t + y$.*

Řešení: Danou rovnici lze přepsat do standardního tvaru $y' - y = t$, máme tedy $p(t) \equiv -1$ a $f(t) = t$. Podle návodu řešíme ve třech krocích:

[1] Prakticky se dává přednost použití některé z aktivních metod, sloužících jinak i k odvození onoho vzorce.

1. Metodou separace proměnných vyřešíme příslušnou homogenní rovnici $y' - y = 0$. Její obecné řešení je

$$y = C \cdot \mathrm{e}^t, \; C \in \mathbb{R}.$$

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že C nahradíme funkcí $K = K(t)$. Po dosazení máme

$$K' \cdot \mathrm{e}^t + K \cdot \mathrm{e}^t - K \cdot \mathrm{e}^t = t;$$

dva členy s K se ruší (a to vždy!) a máme

$$K' = t \cdot \mathrm{e}^{-t}.$$

3. Integrujeme:

$$K = \int t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [\text{metoda per partes}] = C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}.$$

Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^t$ a dostáváme

$$y = (C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}) \cdot \mathrm{e}^t.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$\left[y = C \cdot \mathrm{e}^t - t - 1, \quad C \in \mathbb{R} \right].$$

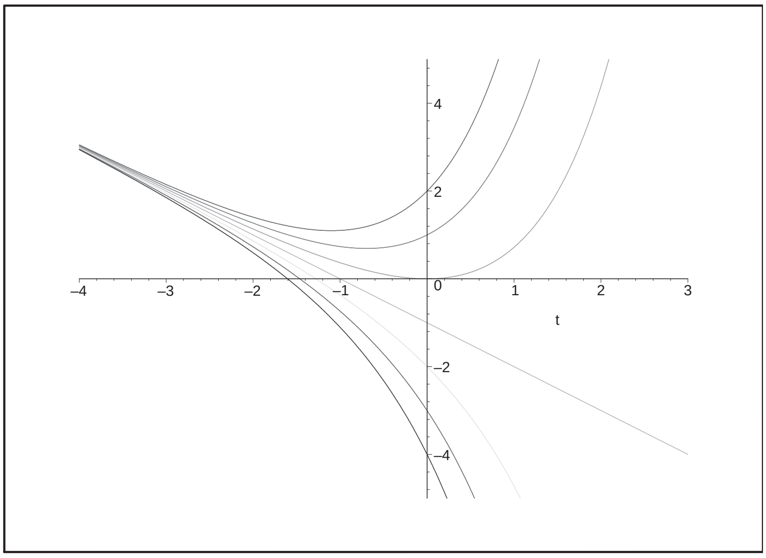
□

Poznámka 3.3. *Vidíme, že obecné řešení nehomogenní rovnice je rovno součtu obecného řešení příslušné rovnice homogenní ($C \cdot \mathrm{e}^t$) a partikulárního řešení dané rovnice nehomogenní ($-t - 1$). Tento poznatek platí pro lineární rovnice obecně.*

Příklad 3.4. *Určíme obecné řešení diferenciální rovnice $y' - ty = t^3$ a najdeme řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 0$.*

Použitá a rozšiřující literatura

[1] J. Fišer: *Úvod do teorie obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic.* Skripta Přf UP, Olomouc, 2013.



Obrázek 2: Grafické znázornění několika řešení z příkladu 3.2.

[2] J. Diblík, M. Růžičková: *Obyčajné diferenciálne rovnice.* EDIS-vydavatelství ŽU, Žilina, 2008.

[3] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU Brno, PřF, 2001.

[4] J. Kopáček: *Matematická analýza nejen pro fyziky II.* Matfyzpress, Praha, 2007.

[5] P. Kreml a kol.: *Matematika II.* VŠB-TU Ostrava, [online], dostupné z: `http://www.studopory.vsb.cz/materialy.html`, [citováno 15. 10. 2012].

[6] J. Kuben: *Obyčejné diferenciální rovnice.* VA Brno, 2000.

[7] J. Nagy: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* MVŠT IX, SNTL, Praha, 1978.

*********** Cvičení ***********

Příklad 3.5. *Určíme obecné řešení diferenciální rovnice* $y' + y\cos t = \sin 2t$.

Řešení: Pravá strana je $\sin 2t$, příslušná rovnice homogenní je $y' + y\cos t = 0$.

1. Separací proměnných dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že C nahradíme funkcí $K = K(t)$. Po dosazení máme

$$K' \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} + K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}(-\cos t) + K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} \cos t = \sin 2t;$$

dva členy s K se ruší (jako vždy) a máme $\quad K' = \mathrm{e}^{\sin t} \sin 2t$.

3. Integrujeme:

$$\begin{aligned} K &= \int \mathrm{e}^{\sin t} \sin 2t \, \mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^{\sin t} 2 \sin t \cos t \, \mathrm{d}t = \left[\begin{array}{ll} u = 2\sin t & v' = \mathrm{e}^{\sin t} \cos t \\ u' = 2\cos t & v = \mathrm{e}^{\sin t} \end{array} \right] \\ &= 2\,\mathrm{e}^{\sin t} \sin t - \int 2\,\mathrm{e}^{\sin t} \cos t \, \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{e}^{\sin t} \sin t - 2\,\mathrm{e}^{\sin t} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}$ a dostáváme

$$y = (2\,\mathrm{e}^{\sin t} \sin t - 2\,\mathrm{e}^{\sin t} + C) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

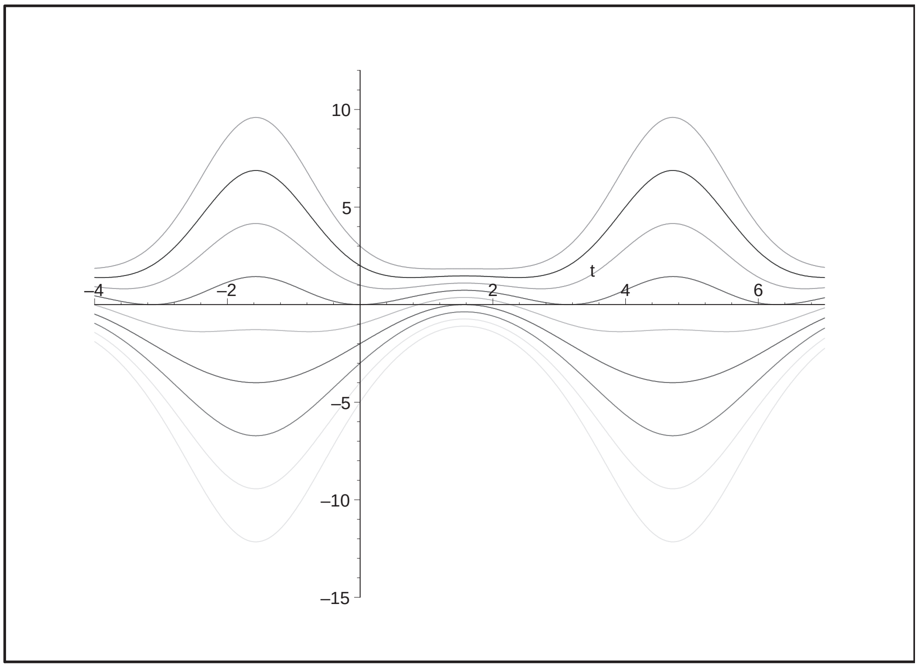
$$\Big[y = 2(\sin t - 1) + C \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}, \quad C \in \mathbb{R} \Big].$$

□

Další příklady:

Příklad 3.6. *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice*
$y' + 2ty = 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}$. $\qquad \Big[y = C\,\mathrm{e}^{-t^2} + t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R} \Big]$

Příklad 3.7. *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice*
$y' + 2y = t^2 + 2t$. $\qquad \Big[y = C\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{4}(2t^2 + 2t - 1), \quad C \in \mathbb{R} \Big]$



Obrázek 3: Grafické znázornění několika řešení z příkladu 3.5.

Příklad 3.8. *Najdeme obecné řešení rovnice* $y' = \dfrac{t(1-y)}{1+t}$.

Řešení. Ze zadání vyplývá, že řešení budeme hledat pro $t \neq -1$, neboť pro tuto hodnotu t není pravá strana definována.

Tato rovnice sice zatím není separovaná, ale je separovatelná, tj. lze v ní separovat proměnné. Vyjádříme-li y' jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, lze rovnici upravit na tvar, kde proměnné jsou již separované:

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t}, \tag{11}$$

přičemž použitá úprava vyžaduje předpoklad $y \neq 1$. Dále

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t}.$$

Po integraci máme

$$-\ln|1-y| = t - \ln|1+t| + C,$$

kde C je libovolná konstanta. V této chvíli je daná diferenciální rovnice již v podstatě vyřešena, všechno další jsou úpravy a kompletace řešení.

Předně, jsou-li v takto získané rovnici logaritmy, bývá vhodné i integrační konstantu vyjádřit jako logaritmus: $C = \ln C_1$, kde C_1 je libovolná *kladná* konstanta (zůstává zachováno, že C je *libovolná* konstanta). Rovnici

$$\ln|1+t| - \ln|1-y| = t + \ln C_1$$

odlogaritmujeme a máme

$$\left|\frac{1+t}{1-y}\right| = C_1\,\mathrm{e}^t\,.$$

Položíme-li $C_2 = \frac{1}{C_1}$ ($C_2 > 0$ je pak také libovolná kladná konstanta), pak

$$\frac{1-y}{1+t} = \pm C_2\,\mathrm{e}^{-t}$$

a z toho

$$\frac{1-y}{1+t} = C_3\,\mathrm{e}^{-t},$$

kde $C_3 \neq 0$, tedy

$$\begin{aligned} 1-y &= C_3\,\mathrm{e}^{-t}(1+t),\\ y &= 1 - C_3\,\mathrm{e}^{-t}(1+t), \end{aligned}$$

což je obecné řešení (11) v explicitním tvaru.

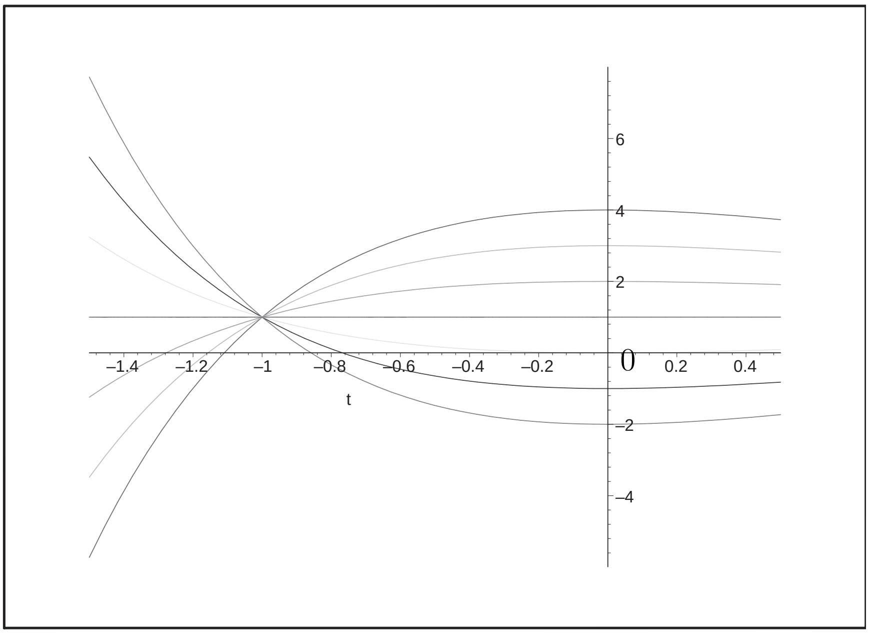
Nyní se vrátíme k podmínce ($y \neq 1$), kterou si vyžádala metoda řešení, a podíváme se, zda jsme tím nezanedbali nějaké řešení. Tedy ověříme, zda $y \equiv 1$, je řešením, tím, že tuto funkci dosadíme do levé a pravé strany dané diferenciální rovnice:

$$L = y' = 0, \qquad P = \frac{t(1-y)}{1+t} = 0.$$

Jelikož $L = P$ pro $t \neq -1$, funkce $y \equiv 1$, $t \neq -1$, je skutečně řešením. Toto řešení však nemusíme uvádět zvlášť, protože je dostaneme, když ve výše uvedeném obecném řešení připustíme nulovou hodnotu C. Konečný tvar obecného řešení je tedy

$$\left[y = 1 + C\,\mathrm{e}^{-t}(1+t), \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \neq -1\right].$$

Situace je znázorněna na obrázku 4. Všimněte si zajímavého chování řešení v blízkosti bodu $(-1, 1)$. $\square$



Obrázek 4: Grafické znázornění několika řešení úlohy 3.8.

Příklad 3.9. *Najdeme (obecné) řešení diferenciální rovnice* $y' = \dfrac{1-2t}{y^2}$.

Řešení. Ze zadání této separovatelné diferenciální rovnice plyne, že neznámá funkce y se nikdy nesmí rovnat nule,

$$y \neq 0,$$

neboť se vyskytuje ve jmenovateli. Tato skutečnost nám umožňuje vynásobit celou rovnici y^2 a po přepsání derivace na podíl diferenciálů dostáváme (zde bez dodatečných podmínek):

$$y^2 y' = 1 - 2t.$$

Pokračujeme v úpravách a výpočtech:

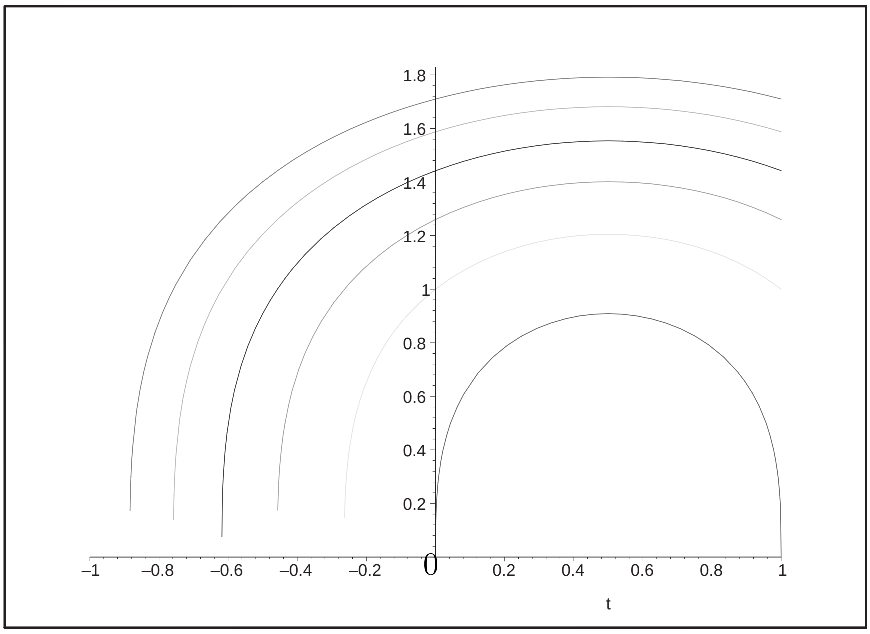
$$\begin{aligned}
y^2 \,\mathrm{d}y &= (1-2t)\,\mathrm{d}t, \\
\int y^2 \,\mathrm{d}y &= \int (1-2t)\,\mathrm{d}t, \\
\frac{1}{3}y^3 &= t - t^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\
y^3 &= 3t - 3t^2 + C_2, \quad C_2 = 3C_1 \Rightarrow C_2 \in \mathbb{R}, \\
y &= \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C_2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Obecné řešení dané rovnice je

$$\left[y = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0 \right].$$

Na obrázku 5 je poněkud nedokonale znázorněno několik kladných řešení.

$\square$



Obrázek 5: Grafické znázornění několika řešení úlohy 3.9.

Další příklady:

Příklad 3.10. *Pomocí separace proměnných vyřešte následující diferenciální rovnice:*

1. $y' = \dfrac{y}{t}, \quad [y = Ct,\ C \in \mathbb{R},\ t \neq 0],$

2. $y' = \dfrac{t}{y}, \quad \left[y = \pm\sqrt{t^2 + C},\ C \in \mathbb{R},\ y \neq 0,\ t \geq -C\right],$

3. $y' = -\dfrac{y}{t}, \quad \left[y = \frac{C}{t},\ C \in \mathbb{R},\ t \neq 0\right],$

4. $y' = -\dfrac{t}{y}$, $\quad [y^2 + t^2 = C,\ C \geq 0,\ y \neq 0]$,

5. $y' = \dfrac{y-1}{t^2 y^2}$, $\quad \left[\begin{array}{l} \frac{y^2}{2} + y + \ln(y-1) = -\frac{1}{t} + C,\ C \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ y \neq 0, \\ y \equiv 1 \end{array}\right]$.