KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 1,

Neurčitý integrál 1

13. února 2017

1 Opakování, příprava pro integrování

Spojitost, limita funkce, derivace.

Úloha 1.1. *Uvažujme funkci* $F(x) = x \ln |x| - x$.

— *Určete její definiční obor.*

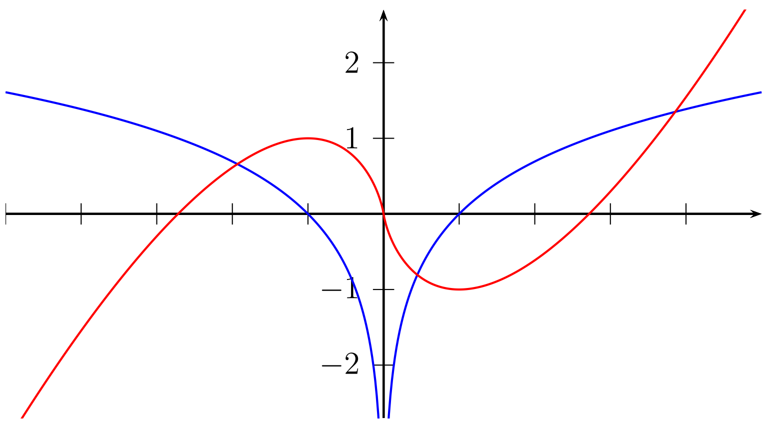
— *Jak je to s její spojitostí? Případnou nespojitost vyšetřete pomocí limit.*

— *Ukažte, že* $F'(x) = \ln |x|$ *(rozdělte si to na dva případy:* $x > 0$ *a* $x < 0$*).*

  Jaký je definiční obor F'*?*

— *Načrtněte graf funkce* $f(x) = \ln |x|$.

(Můžete se inspirovat na obrázku 1. Co přesně na něm je?)



Obrázek 1: Ilustrace k úloze 1.1.

Úloha 1.2. *Uvažujme funkci* $F(x) = \arcsin(\sin x)$.

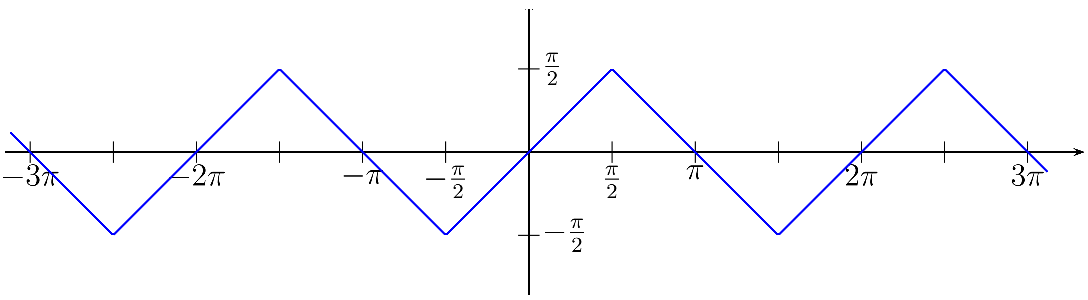
— *Určete její definiční obor.*

— *Jak je to s její spojitostí? Případnou nespojitost vyšetřete.*

— *Za pomoci vzorce* $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *určete* $F'(x)$ *a* $D(F')$.

— *Načrtněte graf* F'.

— *Zvládli byste i graf původní funkce* F*?*



Obrázek 2: Ilustrace k úloze 1.2.

2 Integrace

2.1 Primitivní funkce, neurčitý integrál

Definice 2.1. *Řekneme, že funkce* F *je* primitivní *k funkci* f *na (otevřeném) intervalu* $J = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, *jestliže pro každé* $x \in J$ *platí*

$$F'(x) = f(x).$$

Úloha 2.2. *Najděte primitivní funkci k funkci* $f(x) = x^2$ *a určete na jakém intervalu.*

Řešení. Vzhledem ke znalosti mechanismu derivování mocninné funkce,

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}, \quad \text{(definiční obor závisí na } n\text{)},$$

je kandidátem funkce x^3. Ovšem $(x^3)' = 3x^2$, a tak s využitím pravidla pro derivování reálného násobku funkce,

$$\Big(k \cdot f(x)\Big)' = k \cdot f'(x),$$

„doladíme“ na

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Zde již platí $F'(x) = f(x)$, neboť

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 = x^2 = f(x).$$

Maximální interval, kde toto platí, je

$$J = (-\infty, \infty).$$

Funkce $F(x) = \frac{x^3}{3}$ je tedy primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $J = (-\infty, \infty)$. □

Vzhledem k tomu, že derivace konstantní funkce je rovna nulové funkci a derivace součtu dvou funkcí je rovna součtu jejich derivací, tak pro F primitivní k f na J je také funkce $F + C$, $C = \textit{konst.} \in \mathbb{R}$, také primitivní k f na J, neboť

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Takto vidíme, že při existenci jedné primitivní funkce F dále existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí $F + C$, $C \in \mathbb{R}$. Vzhledem k tomu, že tyto funkce se liší pouze o přičtenou konstantu, tak jejich grafy jsou „shodné“ až na posunutí ve směru osy y.

Primitivní funkce je definována pomocí derivace (musí být „derivace-schopná“), a tak musí být na J spojitá.

Definice 2.3. *Souhrn všech primitivních funkcí k dané funkci f nazýváme* neurčitý integrál *a značíme*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \qquad (C \in \mathbb{R}), \quad x \in J.$$

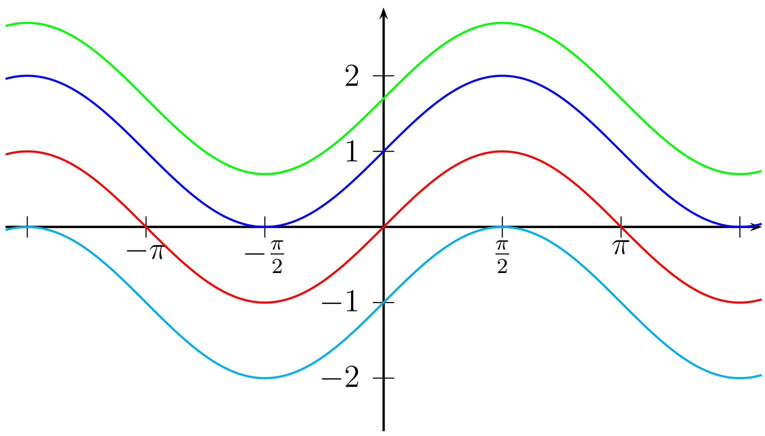
Úloha 2.4. *Určete*

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Víme, že derivace funkce sinus je $(\sin x)' = \cos x$, a tak

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C, \quad J = (-\infty, \infty).$$

Několik takových funkcí je znázorněno na obrázku 3. □



Obrázek 3: Grafy několika primitivních funkcí z úlohy 2.4: $y = \sin x$, $y = \sin x + 1{,}7$, $y = \sin x - 1$ a $y = \sin x + 1$.

Tak bychom z tabulky derivací elementárních funkcí mohli odvodit i další neurčité integrály:

- $\displaystyle\int c \, \mathrm{d}x = cx + C, \qquad J = (-\infty, \infty).$
- $\displaystyle\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \qquad J \text{ závisí na } n.$

Úloha 2.5. *Pro ilustraci předchozího vzorce vypočteme:*

a) $$\int x \, \mathrm{d}x = \int x^1 \, \mathrm{d}x = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C, \quad J = (-\infty, \infty).$$

b) $$\int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \int x^{-2} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C,$$

$J = (-\infty, 0)$ *nebo* $J = (0, \infty)$.

c) $$\int \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C,$$

$J = (0, \infty)$.

d) $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{3}} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c,$$

$J = (-\infty, 0)$ *nebo* $J = (0, \infty)$.

Dále uvedeme:

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \qquad J = (-\infty, 0) \quad \text{nebo} \quad J = (0, \infty).$

Poslední vzorec je zřejmý pro $x > 0$, to přímo odpovídá vzorečku pro derivaci funkce $\ln x$. Platnost pro $x < 0$ si ukažme:

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x, \qquad (\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

- $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a > 0,\ a \neq 1, \quad J = (-\infty, \infty).$
- $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C, \qquad J = (-\infty, \infty).$
- $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C, \qquad J = (-\infty, \infty).$
- $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C, \qquad J = (-\infty, \infty).$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C,$ $\quad J$ může být každý interval, který neobsahuje liché násobky $\frac{\pi}{2}$, tedy například $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C,$ $\quad J$ může být každý interval, který neobsahuje násobky π, tedy například $(0, \pi)$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C, \qquad J = (-\infty, \infty).$

Z pravidel pro derivování součtu a rozdílu dvou funkcí můžeme odvodit také podobné vlastnosti integrálu (za předpokladu existence všech přítomných integrálů).

- $\displaystyle\int k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{R}, \qquad (J \text{ závisí na } f),$
- $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (J \text{ závisí na } f \text{ a } g).$

2.2 Úlohy na přímou integraci

Úloha 2.6. *Určete* $\displaystyle\int \frac{5x^2-3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

Řešení. Pomocí výše uvedených pravidel a základních vzorců vypočteme

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2-3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = 5\int x^{2-\frac12}\,\mathrm{d}x - 3\int x^{-\frac12}\,\mathrm{d}x\\ &= 5\frac{x^{\frac32+1}}{\frac32+1}-3\frac{x^{-\frac12+1}}{-\frac12+1}+C = \frac{5}{\frac52}x^{\frac52}-\frac{3}{\frac12}x^{\frac12}+C\\ &= 2\sqrt{x^5}+6\sqrt{x}+C,\end{aligned}$$

kde maximální $J=(0,\infty)$ (i když jsou výsledné funkce definovány na $[0,\infty)$, jako primitivní funkce jejich definiční obor musí být podmnožinou definičního oboru integrované funkce, což je právě $(0,\infty)$). □

Úloha 2.7. *Určete* $\displaystyle I=\int \frac{3^x\cos^2 x-5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Řešení. Pomocí výše uvedených pravidel a základních vzorců vypočteme

$$\int \frac{3^x\cos^2 x-5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int 3^x\,\mathrm{d}x - 5\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3}-5\operatorname{tg}x+C,$$

kde J je jakýkoli interval, který neobsahuje liché násobky $\frac{\pi}{2}$, tedy například $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. □

2.3 Integrace podle složitějších vzorců

V matematické literatuře existuje celá řada více či méně složitých vzorců pro integraci různých funkcí.

Úloha 2.8. *Našel jsem vzorec*

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}+C,\qquad a>0.$$

Jak mu rozumíte? Pro jaké hodnoty proměnné x platí?

Vypočtěte s jeho pomocí

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Zřejmě musí být $a^2 - x^2 > 0$, a tak $x \in (-a, a)$.

Z porovnání zadání se vzorcem vyplývá, že $a^2 = 3$, tudíž $a = \sqrt{3}$. Dosazením do vzorce dostáváme:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C, \quad J = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

□

Úloha 2.9. *Pomocí obecnějšího vzorce*

$$\int \frac{x \, dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{b}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} - \frac{1}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} \right] + C, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$$

vypočtěte

$$\int \frac{x \, dx}{(2x+3)^5}.$$

Řešení. Nejprve si stanovíme parametry a podmínky:

$$a = 2, \quad b = 3, \quad n = 5, \quad 2x + 3 \neq 0 \ \Rightarrow \ x \neq -\frac{3}{2}.$$

Nyní dosadíme:

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{(2x+3)^5} &= \frac{1}{2^2} \left[\frac{3}{(5-1)(2x+3)^{5-1}} - \frac{1}{(5-2)(2x+3)^{5-2}} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4(2x+3)^4} - \frac{1}{3(2x+3)^3} \right] + C, \end{aligned}$$

kde $J = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ nebo $J = \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$. □

2.4 Integrace metodou per partes

Z pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí se dá odvodit metoda nazvaná *integrace per partes.*

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' \quad \Longrightarrow \quad uv' = (u \cdot v)' - u'v \quad \Longrightarrow$$
$$\int uv' \, dx = \int (u \cdot v)' \, dx - \int u'v \, dx = uv - \int u'v \, dx.$$

Problém výpočtu integrálu na levé straně, tedy $\int uv' \, dx$, můžeme převést na problém výpočtu u', v a integrálu na pravé straně, tedy $\int u'v \, dx$.

Použití této metody si ukážeme na příkladech.

Úloha 2.10. *Metodou per partes vypočtěte*

$$\int x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Dílčí funkce u a v' si musíme vhodně zvolit. Zde se nám bude hodit volba $u = x$ a $v' = \cos x$, neboť derivací x dostaneme konstantu 1 a $\cos x$ umíme zintegrovat:

$$\begin{aligned}\int x \cos x \,\mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{cc} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array}\right] = x \sin x - \int 1 \sin x \,\mathrm{d}x \\ &= x \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C,\end{aligned}$$

kde $\qquad J = (-\infty, \infty).$ □

V následující úloze budeme muset metodu per partes použít dvakrát. U úloh tohoto typu, tedy

$$\int x^n \cos x \,\mathrm{d}x, \qquad \int x^n \sin x \,\mathrm{d}x \quad \text{či} \quad \int x^n \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x,$$

se každým jejím použitím sníží o jedničku mocnina x.

Úloha 2.11. $\displaystyle\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x.$

Řešení.

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{cc} u = x^2 & v' = \cos x \\ u' = 2x & v = \sin x \end{array}\right] = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \,\mathrm{d}x \\ &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{cc} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array}\right] \\ &= x^2 \sin x - 2\Big[x(-\cos x) - \int 1(-\cos x) \,\mathrm{d}x\Big] \\ &= x^2 \sin x - 2\Big[-x \cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x\Big] \\ &= x^2 \sin x - 2\Big[-x \cos x + \sin x\Big] + C \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C,\end{aligned}$$

kde opět $\qquad J = (-\infty, \infty).$ □

Metodou per partes se dají integrovat i další typy funkcí.

Úloha 2.12. $I = \int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x.$

Řešení.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{cc} u = \sin^2 x & v' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ u' = 2\sin x \cos x & v = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{array}\right] \\
&= \sin^2 x \frac{\sin x}{\cos x} - \int 2 \sin x \cos x \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 2\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \dfrac{x - \sin x \cos x}{2} + C \\ \text{(viz následující úlohu 2.13)} \end{array}\right] \\
&= \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 2\frac{x - \sin x \cos x}{2} + C = \frac{\sin^3 x}{\cos x} - x + \sin x \cos x + C,
\end{aligned}$$

kde otevřený interval J volíme tak, aby neobsahoval žádné nulové body funkce $\cos x$ (čísla tvaru $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), tedy například $J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. $\square$

A postup nemusí být vždy takový přímočarý.

Úloha 2.13. $I = \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x.$

Řešení.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{cc} u = \sin x & v' = \sin x \\ u' = \cos x & v = -\cos x \end{array}\right] \\
&= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin x \cos x + \int \mathrm{d}x - \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Máme tedy barevně vyznačenou rovnost

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x,$$

ze které si můžeme hledaný integrál snadno vyjádřit:

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C.$$

$\square$