KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 2,

Neurčitý a určitý integrál

20., 21., 27. a 28. února 2017

1 Substituční metoda integrace

Při hledání primitivních funkcí (neurčitého integrálu) se používá celá řada metod. V minulé přednášce jsme si představili tzv. *přímou integraci* (kdy si vystačíme s tabulkovými integrály a některými jednoduchými pravidly pro úpravu integrálů) a metodu *per partes*.

Dnes přidáme ukázku jednoduchého použití *metody substituční*. Její fungování je založeno na dvou *větách o substituci* a mnoha speciálních typech substitucí. Od obojího si ukrojíme jen malý krajíček, ale měli bychom o této metodě získat alespoň hrubou představu.

Začneme ukázkou, jak se substituce v integrálu zapisuje a provádí.

Úloha 1.1. *Vypočtěte* $\displaystyle\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x.$

Řešení.

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \sin x = u \\ \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array} \right] = \int u \, \mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C,$$

$x \in (-\infty, \infty)$. $\square$

Vidíme, že pomocí substituce $u = \sin x$ jsme převedli původní integrál $\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$ v proměnné x na jednodušší integrál $\int u \, \mathrm{d}u$ v proměnné u. Po jeho výpočtu jsme se zpětným dosazením za u dobrali výsledku původní úlohy. Dále vidíme, že tzv. diferencováním substituční rovnice (diferenciál nějaké funkce $f(x)$ zapíšeme jednoduše jako $f'(x) \, \mathrm{d}x$, pro u je to triviálně $u' \mathrm{d}u = 1 \mathrm{d}u = \mathrm{d}u$) jsme získali i potřebný vztah $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}u$ (zde $\cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$).

Zmíněné dvě věty o substituci se odlišují tím, že 1. věta o substituci popisuje situaci, kdy v integrálu nahrazujeme nějakou funkci v aktuální proměnné (zpravidla x) novou proměnnou (v předešlé úloze jsme volili $u = \sin x$).

Kdežto 2. věta o substituci se věnuje tomu případu, kdy stávající proměnnou nahradíme funkcí v nové proměnné (například $x = t^2$).

Vyslovme 1. větu o substituci.

Věta 1.2 (1. substituční metoda)**.** *Předpokládejme, že funkce* $\omega : (a,b) \to (A,B)$ *má derivaci všude v* (a,b) *a že funkce* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *má tvar*

$$f = (g \circ \omega) \cdot \omega',$$

kde $g : (A,B) \to \mathbb{R}$*. Pak platí:*

Je-li G *funkce primitivní ke* g *v* (A,B)*, je funkce* $G \circ \omega$ *funkce primitivní k* f *v* (a,b)*.*

$$\underbrace{\int g(\underbrace{\omega(x)}_{u})\,\underbrace{\omega'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} = \overbrace{\int g(u)\mathrm{d}u = G(u) + C}^{G \text{ je primitivní ke } g} = G(\omega(x)) + C = (G \circ \omega)(x)}_{(G\circ\omega) \text{ je primitivní ke } (g\circ\omega)\cdot\omega'}$$

V příkladech na použití 1. věty o substituci má tedy integrovaná funkce tvar součinu složené funkce a derivace vnitřní funkce.

V úloze 1.1 to bylo $\sin x \cos x$, kde $g(u) = u$ a $\omega(x) = \sin x$.

Úloha 1.3. $I = \displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Řešení. $I = \displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \left[\begin{array}{c} u = x^2 - a^2 \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}u}{2} = x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u =$

$\displaystyle\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 - a^2} + C.$ □

Uvedeme i 2. větu o substituci. Uvidíme, že podmínky pro její použití jsou náročnější. Proto také zájemce o její využití odkážeme na literaturu a zde v tomto kurzu se jí dále zabývat nebudeme.

Věta 1.4 (2. substituční metoda)**.** *Nechť* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *a nechť* $\omega : (\alpha,\beta) \to_{na} (a,b)$ *(tzn., že* $\omega(\alpha,\beta) = (a,b)$*) splňuje všude v* (α,β) *podmínku* $0 \neq \omega' \neq \pm\infty$*. Pak platí*

Je-li G *funkce primitivní ke* $g := (f \circ \omega)\omega'$ *v* (α,β)*, je funkce* $F := G \circ \omega^{-1}$ *funkce primitivní k* f *v* (a,b)*.*

2 Speciální případy aplikace 1. věty o substituci

2.1 Lineární substituce $u = ax + b$, $a \neq 0$

$$\int g(ax+b)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = ax+b \\ \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}u \end{bmatrix} = \int g(u)\frac{1}{a}\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int g(u)\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{a}G(u) + C = \frac{1}{a}G(ax+b) + C.$$

Úloha 2.1. $\int \Big(\cos(2x-3) + \sin(x+5)\Big)\,\mathrm{d}x.$

Řešení. $\int \Big(\cos(2x-3)+\sin(x+5)\Big)\,\mathrm{d}x = \int \cos(2x-3)\,\mathrm{d}x + \int \sin(x+5)\,\mathrm{d}x =$
$\left[\begin{array}{c|c} u = 2x-3 & v = x+5 \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}v = \,\mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}u}{2} = \,\mathrm{d}x & \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \cos(u)\mathrm{d}u + \int \sin(v)\mathrm{d}v =$

$\frac{1}{2}\sin(u) - \cos(v) + C = \frac{1}{2}\sin(2x-3) - \cos(x+5) + C.$ □

2.2 Integrace funkcí tvaru $\dfrac{h'(x)}{h(x)}$

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = h(x) \\ \mathrm{d}u = h'(x)\,\mathrm{d}x \\ \Big(g(u) = \frac{1}{u}\Big) \end{bmatrix} = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|h(x)| + C,$$

kde x je z nějakého intervalu, kde je definováno $h(x)$ i $h'(x)$ a současně je $h(x) \neq 0$.

Tento výsledek můžeme také použít jako další tabulkový integrál:

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|h(x)| + C.$$

Úloha 2.2. $I = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$, *na každém intervalu, kde* $\sin x \neq 0$.

Úloha 2.3. $I = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$, *na každém intervalu, kde* $\cos x \neq 0$.

Cvičení na substituce

Příklady 2.20–2.25 na stranách 31–33, příklady z poznámky 2.26 na straně 33, příklad 2.6 i) na straně 12 a příklad 6 k) na straně 17. Vše ve skriptech [HKR].

3 Newtonův integrál

Definice 3.1 (Zobecněná primitivní funkce)**.** *Nechť*

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

a nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body a a b. Říkáme, že F je zobecněnou primitivní funkcí funkce f v intervalu I, je-li funkce F spojitá v I a platí-li rovnost $F' = f$ všude v $I - K$, kde $K \subset I$ je nějaká konečná množina.

- Zde (na rozdíl od primitivní funkce) nemusí být jen otevřený interval (a, b), ale i $[a, b)$, $(a, b]$ nebo $[a, b]$. Takže zde můžeme uvažovat jednostrannou spojitost a derivace v krajních bodech, pokud do intervalu patří.
- Podstatné je, že na otevřeném intervalu (a, b) je každá primitivní funkce také zobecněnou primitivní funkcí.

Definice 3.2 (Přírůstek funkce)**.** *Nechť F je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Hodnotu*

$$F(b) - F(a)$$

budeme nazývat přírůstkem funkce F na intervalu $[a, b]$.

Tento pojem se dá zobecnit následovně:

Definice 3.3 (Zobecněný přírůstek funkce)**.** *Nechť*

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

a nechť F je funkce spojitá na otevřeném intervalu (a, b). Hodnotu

$$[F]_a^b = [F(x)]_a^b := F(b-) - F(a+) = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

budeme nazývat zobecněným přírůstkem funkce F na intervalu (a, b).

- V případě, že $F(a+)$ a $F(b-)$ jsou konečné limity, tak říkáme, že zobecněný přírůstek $[F(x)]_a^b$ má smysl.

- V opačném případě (kdy alespoň jedna z limit je nekonečná nebo neexistuje) říkáme, že zobecněný přírůstek $[F(x)]_a^b$ nemá smysl.

Definice 3.4 (Newtonův integrál)**.** *Předpokládejme, že:*

1. *I je interval s krajními body a a b, kde $-\infty \le a < b \le +\infty$,*
2. *F je zobecněná primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b)*
3. *a zobecněný přírůstek $[F(x)]_a^b$ má smysl.*

Potom Newtonův integrál funkce f přes interval I s krajními body $a < b$ definujeme rovností

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b.$$

Symbolu vlevo se též říká (Newtonův, určitý) integrál funkce f od a do b, číslo a resp. b je tzv. dolní resp. horní mez integrálu. Funkce f se nazývá integrand nebo integrovaná funkce, interval I je integrační obor, x je integrační proměnná.

Abychom měli základní představu, kdy tento integrál určitě existuje:

Věta 3.5 (Základní věta o existenci integrálu)**.** *Je-li funkce f spojitá a omezená v omezeném intervalu (a, b), integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.*

Úloha 3.6.

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = -(-1) - (-(1)) = 2.$$

Úloha 3.7.

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -2.$$

Úloha 3.8 (Integrovaná funkce není spojitá, ale je omezená)**.**

$$\int_0^1 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = [|x|]_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

Úloha 3.9 (Cvičení: Integrovaná funkce není definovaná v 0 a není omezená)**.** *Vypočtěte*

$$\int_{-\mathrm{e}}^1 \ln|x|\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve hledáme primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x) = \ln|x|$. Vzhledem k tomu, že $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, tak ji (je) budeme uvažovat postupně na obou intervalech.

Pro $x \in (0, \infty)$, tedy $x > 0$ máme $f(x) = \ln|x| = \ln x$:

$$\begin{aligned} \int \ln x \, \mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{bmatrix} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln|x| - x + C. \end{aligned}$$

Pro $x \in (-\infty, 0)$, tedy $x < 0$ máme $f(x) = \ln|x| = \ln(-x)$:

$$\begin{aligned} \int \ln(-x) \, \mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \ln(-x) \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln(-x) & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{-x}(-1) = \ln x & v = x \end{bmatrix} \\ &= x \ln(-x) - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln(-x) - \int \mathrm{d}x = x \ln|x| - x + C. \end{aligned}$$

Na obou intervalech tedy můžeme zapsat příslušnou primitivní funkci ve stejném tvaru

$$F(x) = x \ln|x| - x, \quad \text{kde} \quad x \in (-\infty, 0) \quad \text{nebo} \quad x \in (0, \infty),$$

respektive máme primitivní funkci na jakémkoli intervalu, který neobsahuje 0.

Ovšem náš integrační obor $(-\mathrm{e}, 1)$ nulu obsahuje. Zkusíme tedy „vyrobit“ zobecněnou primitivní funkci na $(-\mathrm{e}, 1)$. Nejprve vypočteme jednostranné limity v nule (s využitím LP):

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} x \ln|x| - x &= 0, \\ \lim_{x \to 0^+} x \ln|x| - x &= 0, \end{aligned}$$

a tak i

$$\lim_{x \to 0} x \ln|x| - x = 0.$$

Tím jsme zjistili, že funkce $x \ln|x| - x$, má v nule odstranitelnou nespojitost, kterou odstraníme dodefinováním:

$$F(x) = \begin{cases} x \ln|x| - x & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$F(x)$ je nyní spojitá na $\mathbb{R}$ a platí, že $F'(x) = f(x)$ všude kromě nuly. Tím je F zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na $\mathbb{R}$, a tedy i na $(-\mathrm{e}, 1)$, a tak ji můžeme využít při výpočtu našeho integrálu:

$$\int_{-\mathrm{e}}^{1} \ln|x| \,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-\mathrm{e}}^{1} = (1\ln|1|-1)-(-\mathrm{e}\ln|-\mathrm{e}|-(-\mathrm{e})) = (-1)-(0) = -1.$$

□

Úloha 3.10 (Cvičení: Nekonečná horní mez)**.**

$$\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = [-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1.$$

Úloha 3.11 (Cvičení: Existuje)**.**

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\sin x} \,\mathrm{d}x = \Big[\ln|1+\sin x|\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \Big[\ln(1+\sin x)\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \cdots .$$

Úloha 3.12 (Cvičení: Neexistuje)**.**

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x} \,\mathrm{d}x$$

neexistuje, protože na tomto intervalu neexistuje příslušná zobecněná primitivní funkce. Problém je v bodě $x = \frac{3}{2}\pi$, kde má funkce $F(x) = \ln(1+\sin x)$ neodstranitelnou nespojitost.

Úloha 3.13 (Cvičení: Integrál s parametrem)**.** *Ukažte, že $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$, pro všechna $\alpha < 1$, zatímco pro žádné $\alpha \geq 1$ tento integrál neexistuje.*

Úloha 3.14 (Cvičení: Integrál s parametrem a nekonečnou horní mezí)**.** *Ukažte, že $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$, pro všechna $\alpha > 1$, zatímco pro žádné $\alpha \leq 1$ tento integrál neexistuje.*

Úloha 3.15 (Cvičení: Integrály sice existují, ale neumíme je vypočíst)**.** $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$ *a* $\displaystyle\int_0^1 \cos\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$.

3.1 Vlastnosti Newtonova integrálu

Věta 3.16 (Linearita integrálu vzhledem k integrované funkci)**.** *Pro libovolné reálné konstanty k_1, k_2 je*

$$\int_a^b (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) \,\mathrm{d}x = k_1 \int_a^b f_1(x) \,\mathrm{d}x + k_2 \int_a^b f_2(x) \,\mathrm{d}x,$$

existují-li integrály vpravo. (Funkcí a konstant může být lobovolný konečný počet.)

Věta 3.17 (Monotonie integrálu)**.** *Je-li na* (a, b) $f(x) < g(x)$*, potom také*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

existují-li oba integrály.

Věta 3.18 (Aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru)**.** *Je-li* c *takové, že* $a < c < b$*, potom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

má-li jedna strana této rovnosti smysl. (Takových dělicích bodů může být libovolný konečný počet.)

Úloha 3.19 (Využití aditivity integrálu)**.** *Vypočtěte* $\int_0^2 (|x-1|+3)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Absolutní hodnota má jediný nulový bod $x = 1$, který spadá do integračního oboru:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (|x-1|+3)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (-(x-1)+3)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 ((x-1)+3)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (-x+4)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x+2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 \\
&= \left(-\frac{1^2}{2} + 4\cdot 1\right) - (0) + \left(\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} + 2\cdot 1\right) \\
&= 3{,}5 + 3{,}5 = 7.
\end{aligned}$$

□

Úloha 3.20 (Cvičení: Využití aditivity integrálu). *Vypočtěte*

$$I = \int_{-3}^{2} |x-1| - 2\,x\,|x+2| \; \mathrm{d}x.$$

Řešení. Pro integraci výrazů s absolutní hodnotou rozdělíme na intervaly:

x	$\langle -3, -2 \rangle$	$\langle -2, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$
$\lvert x-1 \rvert$	$1-x$	$1-x$	$x-1$
$\lvert x+2 \rvert$	$-(x+2)$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x-1 \rvert - 2\,x\,\lvert x+2 \rvert$	$1-x+2x(x+2)$	$1-x-2x(x+2)$	$x-1-2x(x+2)$
po úpravě	$2x^2+3x+1$	$-2x^2-5x+1$	$-2x^2-3x-1$

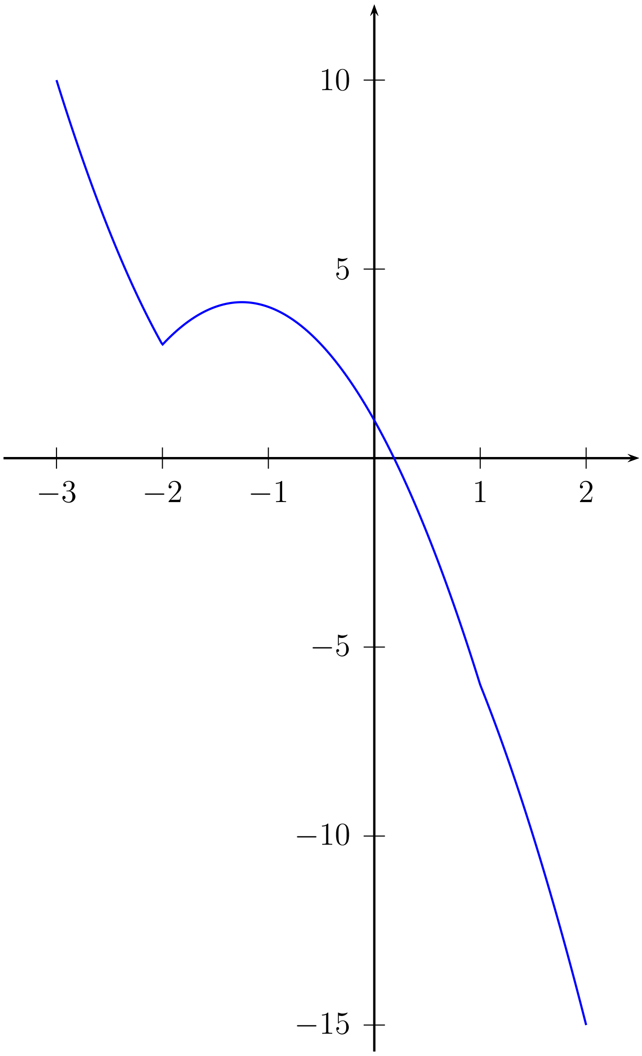
Po rozdělení na tři integrály a dosazení dostaneme:

$$I = \int_{-3}^{-2} (2x^2+3x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{1} (-2x^2-5x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (-2x^2-3x-1)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní již provedeme výpočet:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-3}^{-2} (2x^2+3x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{1} (-2x^2-5x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (-2x^2-3x-1)\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{x=-3}^{-2} + \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right]_{x=-2}^{1} + \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x\right]_{x=1}^{2} = \\
&= \left[\left(\frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 + (-2)\right) - \left(\frac{2}{3}(-3)^3 + \frac{3}{2}(-3)^2 + (-3)\right)\right] + \\
&\quad + \left[\left(-\frac{2}{3}1^3 - \frac{5}{2}1^2 + 1\right) - \left(-\frac{2}{3}(-2)^3 - \frac{5}{2}(-2)^2 + (-2)\right)\right] + \\
&\quad + \left[\left(-\frac{2}{3}2^3 - \frac{3}{2}2^2 - 2\right) - \left(-\frac{2}{3}1^3 - \frac{3}{2}1^2 - 1\right)\right] = \\
&= \left[\left(-\frac{16}{3} + 6 - 2\right) - \left(-18 + \frac{27}{2} - 3\right)\right] + \left[\left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 1\right) - \left(\frac{16}{3} - 10 - 2\right)\right] + \\
&\quad + \left[\left(-\frac{16}{3} - 6 - 2\right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{2} - 1\right)\right] = \\
&= \frac{-16-2-16-16+2}{3} + \frac{-27-5+3}{2} + (4+21+1+12-8+1) = \\
&- -\frac{48}{3} - \frac{29}{2} + 31 = -16 - 14 - \frac{1}{2} + 31 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□



Obrázek 1: Graf funkce $y = |x - 1| - 2\,x\,|x + 2|$.

Úloha 3.21 (Cvičení: Využití aditivity integrálu)**.** *Diskutujte využití aditivity integrálu v úloze 3.9.*

Úloha 3.22 (Cvičení:)**.** *Diskutujte využití zobecněné primitivní funkce a aditivity integrálu v příkladech 3.27 na straně 129 a 3.10 na straně 114 v [HKR].*

Řešení. Uvažujeme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x \in [-2, 1], \\ -1 & \text{pro } x \in (1, 3), \\ 1 & \text{pro } x \in [3, 4] \end{cases}$$

a integrál

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro jeho výpočet máme dvě možnosti, buď najdeme zobecněnou primitivní funkci na $(-2, 4)$, nebo využijeme aditivitu integrálu a existenci primitivních funkcí na jednotlivých intervalech $(-2, 1)$, $(1, 3)$ a $(3, 4)$.

Druhý přístup bude přímočařejší:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{1} 2\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} -1\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{4} 1\,\mathrm{d}x = [2x]_{-2}^{1} + [-x]_{1}^{3} + [x]_{3}^{4} \\ &= [2 - (-4)] + [-3 - (-1)] + [4 - 3] = 6 - 2 + 1 = 5. \end{aligned}$$

V rámci prvního přístupu si zase zopakujeme „slepování kusů grafu do spojité funkce“. Na jednotlivých intervalech vypadají primitivní funkce následovně:

$$F(x) = \begin{cases} 2x + C_1 & \text{pro } x \in (-2, 1), \\ -x + C_2 & \text{pro } x \in (1, 3), \\ x + C_3 & \text{pro } x \in (3, 4). \end{cases}$$

Potřebujeme volit C_1, C_2 a C_3 tak, abyhom mohli F spojitě dodefinovat v 1 a 3. Tím by nám vyšla spojitá funkce na $(-2, 4)$, která by byla zobecněnou primitivní funkcí na $(-2, 4)$ k f, neboť by $F'(x) = f(x)$ všude na $(-2, 4)$ kromě 1 a 3. Předpisy dílčích funkcí jsou spojité na $\mathbb{R}$, a tak místo jednostranných limit v bodech 1 a 3, tedy

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} 2x + C_1 &= \lim_{x \to 1^+} -x + C_2, \\ \lim_{x \to 3^-} -x + C_2 &= \lim_{x \to 3^+} x + C_3, \end{aligned}$$

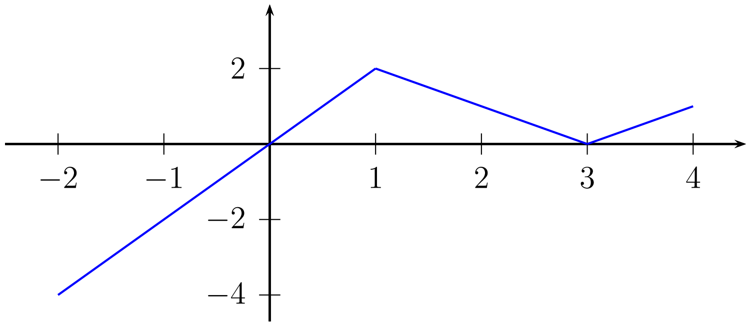
můžeme rovnou dosadit:

$$
\begin{array}{rcl}
2 + C_1 & = & -1 + C_2, \\
-3 + C_2 & = & 3 + C_3. \\
\hline
\end{array}
$$

Máme soustavu dvou lineárních rovnic o třech neznámých, která má nekonečně mnoho řešení. Stačí nám jedno. Volíme například $C_1 = 0$. z první rovnice dostaneme $C_2 = 3$ a následně z druhé $C_3 = -3$. Celkově tedy máme zobecněnou primitivní funkci

$$
F(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x \in (-2, 1), \\ -x + 3 & \text{pro } x \in [1, 3], \\ x - 3 & \text{pro } x \in (3, 4), \end{cases}
$$

jejíž graf je na obrázku 2.



Obrázek 2: Graf zobecněné primitivní funkce $F(x)$ z úlohy 3.22.

Nakonec se dostaneme k výpočtu zadaného integrálu:

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x &= [F(x)]_{-2}^{4} = \lim_{x \to 4^-} F(x) - \lim_{x \to -2^+} F(x) \\
&= \lim_{x \to 4^-} (x - 3) - \lim_{x \to -2^+} (2x) = (4 - 3) - (-4) = 5.
\end{aligned}
$$

$\square$