KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 4,

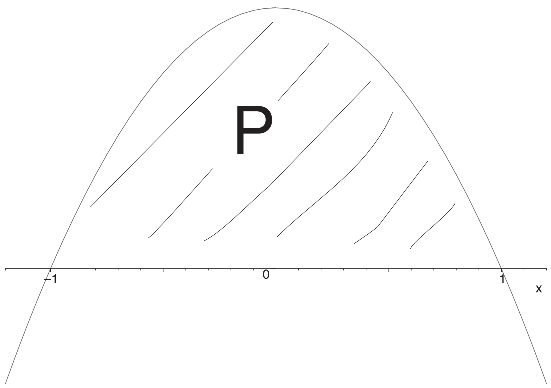
Určitý integrál 2

6. a 7. března 2017

1 Aplikace určitého integrálu

1.1 Počáteční úvahy o výpočtu obsahu geometrických útvarů v rovině

Úloha 1.1. *Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = 1 - x^2$ a osou x.*



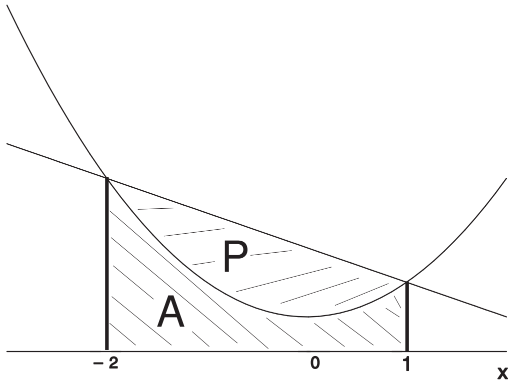
Řešení. Po načrtnutí grafu zjistíme, že jde vlastně o úlohu na výpočet určitého integrálu (dotčený graf paraboly leží nad osou x), u které ale nejprve musíme nalézt integrační meze. Jde o průsečíky paraboly s osou x, tedy nulové body:

$$y = 1 - x^2 = 0, \quad x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = a = -1,\ x_2 = b = 1.$$

$$P = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\ \left[j^2\right].$$

$\square$

Úloha 1.2. *Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 + 1$ a přímkou $y = 3 - x$.*



Řešení. Z obrázku je zřejmé, že meze pro výpočet najdeme jako x-ové souřadnice průsečíků obou grafů, tedy z rovnice:

$$x^2 + 1 = 3 - x, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad x_1 = a = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2, \quad x_2 = b = 1.$$

Dále z obrázku víme, že

$$A = \int_{-2}^{1} (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{x=-2}^{1} = \frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} + 2 = 6\,[j^2]$$

a

$$A + P = \int_{-2}^{1} (3 - x)\,\mathrm{d}x = \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=-2}^{1} = 3 - \frac{1}{2} + 6 + 2 = \frac{21}{2}\,[j^2].$$

A tedy dohromady:

$$P = (A + P) - A = \frac{21}{2} - 6 = \frac{9}{2}\,[j^2].$$

□

1.2 Aplikace určitého integrálu v geometrii

Vzorce pro obsah a délku

	Obsah	Délka křivky
Explicitně	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$
Parametricky	$\left\vert\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{d}x\right\vert = \left\vert\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right\vert$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$
Polárně	$\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$	$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$

Plocha rovinných obrazců

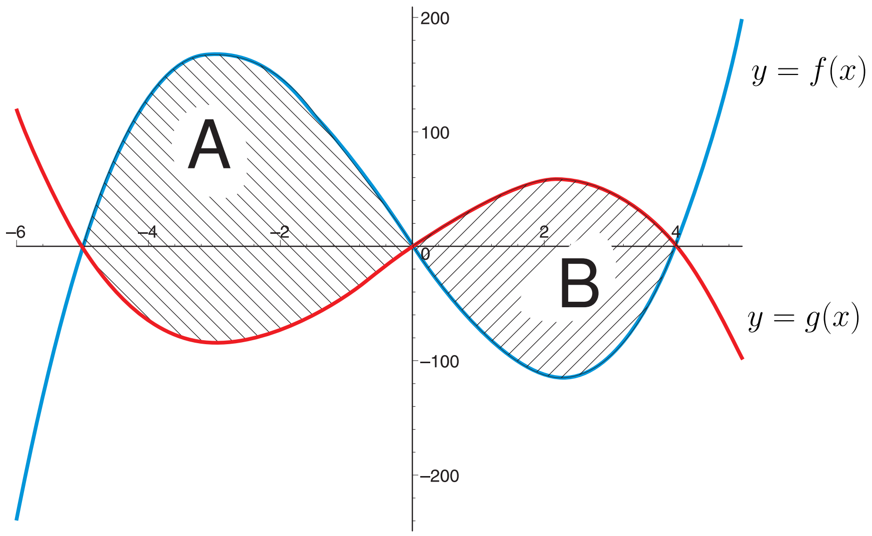
Úloha 1.3. *Grafy funkcí f a g vymezily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočtěte obsah této plochy, jestliže:*

$$f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 80x, \quad g(x) = -2x^3 - 2x^2 + 40x.$$

Řešení. Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

Průsečíky: $f(x) = g(x) \quad\Longrightarrow\quad x_1 = -5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4.$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:



Ze znalosti vzájemné velikosti $f(x)$ a $g(x)$ na intervalech $\langle -5, 0\rangle$ a $\langle 0, 4\rangle$ dostaneme plochy oblastí A a B:

$$P = P_A + P_B = \int_{-5}^{0} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} \Big(g(x) - f(x)\Big)\,\mathrm{d}x,$$

pokud bychom neznali jejich uspořádání, stačí vzít:

$$P = P_A + P_B = \left|\int_{-5}^{0} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{4} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right|,$$

nebo dokonce

$$P = \int_{-5}^{4} \Big|f(x) - g(x)\Big|\,\mathrm{d}x.$$

Pro konečný výpočet použijeme prostřední vztah:

$$\begin{aligned}\int \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x &= \int \Big(\big(4x^3 + 4x^2 - 80x\big) - \big(-2x^3 - 2x^2 + 40x\big)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \Big(6x^3 + 6x^2 - 120x\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2 + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P &= \left|\int_{-5}^{0} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{4} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left[\frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2\right]_{-5}^{0}\right| + \left|\left[\frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2\right]_{0}^{4}\right| \\ &= \left|\frac{1625}{2}\right| + |-448| = \frac{2521}{2}.\end{aligned}$$

□

Úloha 1.4. *Vypočtěte obsah kruhu o poloměru r.*

Řešení. Kruh budeme uvažovat jako rovinný útvar ohraničený kružnicí o poloměru r se středem v počátku. Využijeme její parametrický zápis

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t) = r\cos t, \\ y &= \psi(t) = r\sin t,\end{aligned}$$

kde $t \in [\alpha, \beta] = [0, 2\pi]$.

Nyní tedy podle vzorce

$$P = \left|\int_{\alpha}^{\beta} y\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

vypočteme obsah kruhu. Ještě si to zjednodušíme tak, že si jej vyjádříme jako čtyřnásobek obsahu čtvrtkruhu ($t \in [0, \pi/2]$):

$$\begin{aligned} P &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin t[r(-sint)]\,\mathrm{d}t = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= 4r^2\left[\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4r^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{0-\sin 0\cos 0}{2}\right) \\ &= \pi r^2. \end{aligned}$$

□

Délka oblouku (křivky)

$$s = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t$$

Úloha 1.5. *Určete délku kružnice o poloměru r* $\boxed{\begin{array}{rcl} x &=& a\cos t, \\ y &=& a\sin t, \end{array} \quad t \in [0, 2\pi\rangle.}$

Řešení. $[2\pi r]$ □

Objem tělesa

Pomocí Riemannova integrálu funkce jedné proměnné lze počítat objemy ve dvou případech.

a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$, $x = b$ a známe funkci $P(x)$, jejíž hodnoty znamenají obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose x.

Element objemu je

$$\Delta V = P(x)\cdot\Delta x, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}V = P(x)\cdot\mathrm{d}x,$$

a objem tělesa je

$$V = \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Rotační těleso, kde osou rotace je osa x a které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Zde je řezem kruh o obsahu $\pi[f(x)]^2$ a platí

$$V = \pi\int_a^b \Big[f(x)\Big]^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 1.6. *Vypočtěte objem koule o poloměru r.*

Řešení. $[\frac{4}{3}\pi r^3]$ $\square$

Povrch rotační plochy

Jde o plochy vzniklé rotací křivky l kolem osy x. Element povrchu plochy je

$$\Delta S = 2\pi y \Delta s,$$

takže diferenciál povrchu plochy je

$$\mathrm{d}S = 2\pi y \,\mathrm{d}s.$$

Je-li křivka l dána parametricky:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \varphi(t), \\ y & = & \psi(t), \end{array} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2} \,\mathrm{d}t,$$

je-li křivka l dána explicitně:

$$y = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} \,\mathrm{d}x.$$

Úloha 1.7. *Vypočtěte povrch koule o poloměru r.*

Řešení. $[4\pi r^2]$ $\square$

Cvičení

Úloha 1.8. *Vypočtěte obsah konečného rovinného útvaru ohraničeného grafy funkcí*

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad a \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad a\ přímkou \quad x = 1.$$

Načrtněte obrázek. $\left[\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} - 2\right]$

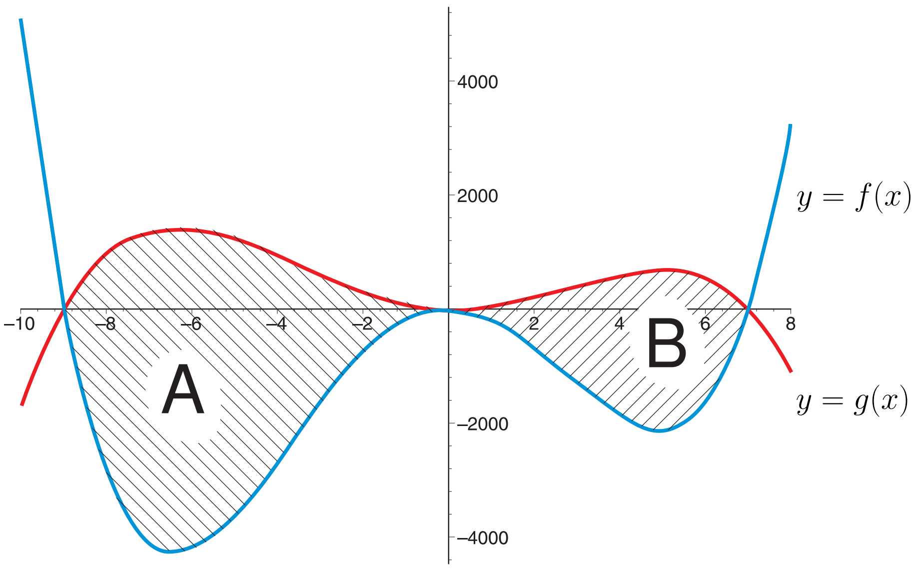
Úloha 1.9 (Cvičení)**.** *Grafy funkcí f a g vymezily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočtěte obsah této plochy, jestliže:*

$$f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 189x^2, \quad g(x) = -x^4 - 2x^3 + 63x^2.$$

Řešení. Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

Průsečíky: $f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -9,\ x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 7.$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:



Nebudeme hledat uspořádání funkcí na intervalech $\langle -9, 0\rangle$ a $\langle 0, 7\rangle$, a přímo vezmeme:

$$P = P_A + P_B = \left| \int_{-9}^{0} \Big(f(x) - g(x) \Big)\, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{0}^{7} \Big(f(x) - g(x) \Big)\, \mathrm{d}x \right|.$$

$$\begin{aligned} \int \Big(f(x) - g(x) \Big)\, \mathrm{d}x &= \int \Big(\big(3x^4 + 6x^3 - 189x^2\big) - \big(-x^4 - 2x^3 + 63x^2\big) \Big)\, \mathrm{d}x \\ &= \int \Big(4x^4 + 8x^3 - 252x^2 \Big)\, \mathrm{d}x = \frac{4}{5}x^5 + 2x^4 - 84x^2 + C. \end{aligned}$$

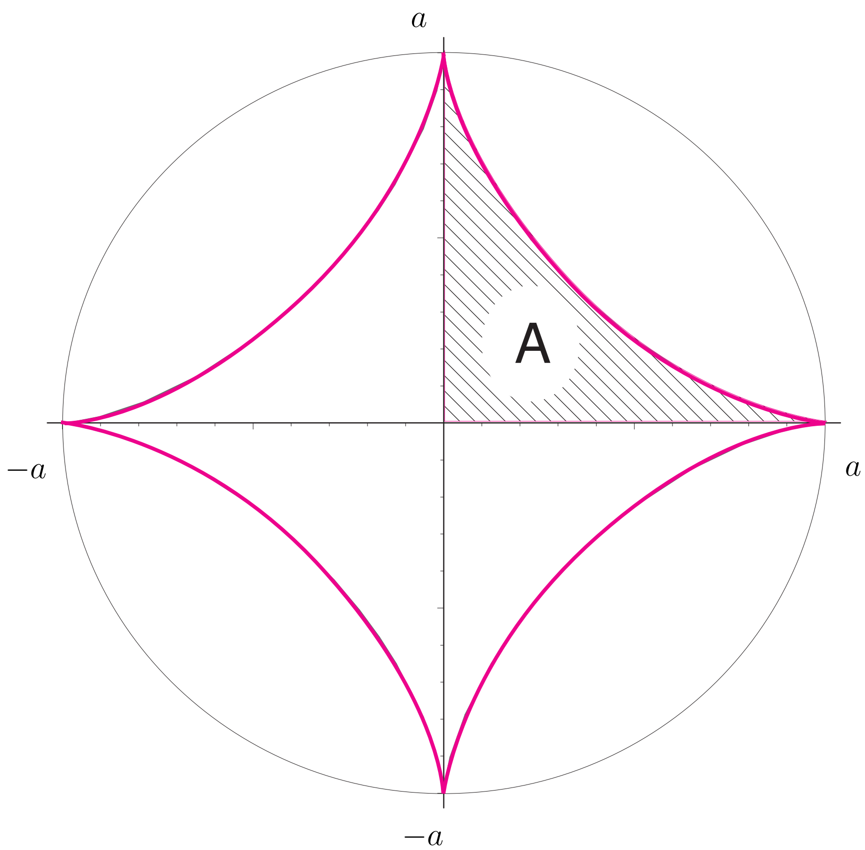
$$\begin{aligned} P &= \left|\int_{-9}^{0}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{7}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left[\frac{4}{5}x^5+2x^4-84x^2\right]_{-5}^{0}\right| + \left|\left[\frac{4}{5}x^5+2x^4-84x^2\right]_{0}^{4}\right| \\ &= \left|-\frac{135594}{5}\right| + \left|-\frac{52822}{5}\right| = \frac{188416}{5}. \end{aligned}$$

□

Úloha 1.10. *Určete obsah asteroidy* $\boxed{\begin{array}{rcl} x &=& a\cos^3 t, \\ y &=& a\sin^3 t, \end{array} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.}$

Řešení. Máme tedy $\begin{array}{rcl} x &=& a\cos^3 t = \varphi(t), \\ y &=& a\sin^3 t = \psi(t), \end{array} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$

Na následujícím obrázku je znázorněna asteroida a postup výpočtu (vyjdeme ze symetrie asteroidy, a tak vypočteme obsah obrazce A jako čtvrtinu obsahu celé asteroidy):



Použijeme vzorec pro výpočet obsahu plochy ohraničené grafem funkce zadané parametricky:

$$\begin{aligned}
P_A &= \left|\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(a\sin^3 t\Big)\Big(a3\cos^2 t(-\sin t)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|-3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right| = \left[\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \quad \sin^2 t\cos^2 t = \frac{\sin^2 2t}{4}\right] \\
&= \left|-\frac{3}{8}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\sin^2 2t\,\mathrm{d}t\right| = \left|-\frac{3}{16}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|-\frac{3}{16}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(1-\cos 4t-\cos 2t+\cos 2t\cos 4t\Big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left[\cos 2t\cos 4t = \frac{\cos 6t+\cos 2t}{2}\right] \\
&= \left|-\frac{3}{16}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 4t-\cos 2t+\frac{\cos 6t+\cos 2t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|-\frac{3}{32}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\cos 2t-2\cos 4t+\cos 6t\right)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|-\frac{3}{32}a^2\left[\left(2t-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\sin 4t+\frac{1}{6}\sin 6t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| \\
&= \left|-\frac{3}{32}a^2\Big(\Big(2\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}0-\frac{1}{2}0+\frac{1}{6}0\Big)-\Big(2\cdot 0-\frac{1}{2}0-\frac{1}{2}0+\frac{1}{6}0\Big)\Big)\right| \\
&= \left|-\frac{3}{32}a^2\pi\right| = \frac{3}{32}\pi a^2
\end{aligned}$$

A tedy celková plocha asteroidy je

$$P = 4P_A = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

□

Úloha 1.11. *Určete délku oblouku asteroidy* $\boxed{\begin{array}{rcl} x &=& a\cos^3 t, \\ y &=& a\sin^3 t, \end{array} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle.}$

Řešení.

$$\begin{aligned} x' &= -3a\cos^2 t \sin t, \\ x' &= -3a\cos^2 t \sin t, \\ x'^2 + y'^2 &= 9a^2\Big(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t\Big) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t\Big(\sin^2 t + \cos^2 t\Big) \\ &= 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t. \\ s &= \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t \,\mathrm{d}t = 3a\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a. \end{aligned}$$

(*Funkce* $\sin t$ *i* $\cos t$ *jsou na intervalu* $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ *nezáporné, takže po odmocnění není třeba psát absolutní hodnotu.*)

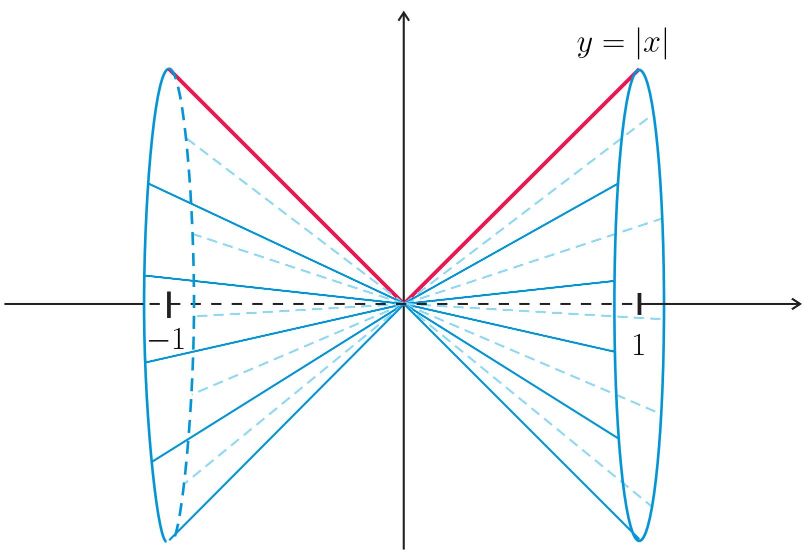
$$\boxed{\text{Délka oblouku asteroidy je} \quad s = \frac{3}{2}a.}$$

(*Celková délka asteroidy je tedy* $4s = 6a$.) □

Úloha 1.12. *Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce* $y = |x|$ *kolem osy* x *na intervalu* $\langle -1, 1\rangle$.

Řešení. Vyjdeme ze vzorce pro objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x:

$$V = \pi \int_a^b \big[f(x)\big]^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^1 |x|^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\ [j^3].$$

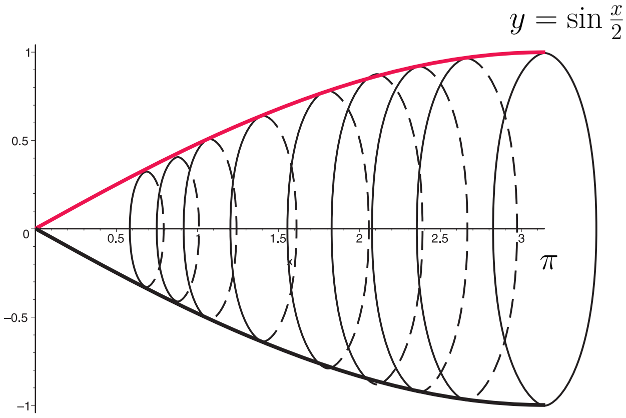


$\square$

Úloha 1.13. *Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce* $y = \sin\frac{x}{2}$ *kolem osy* x *na intervalu* $\langle 0, \pi\rangle$.

Řešení. Obdobně jako u předchozí úlohy:

$$V = \pi\int_0^\pi \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[x - \sin x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}(\pi) = \frac{1}{2}\pi^2\ [j^3].$$



$\square$

Úloha 1.14. *Vypočtěte povrch tělesa vzniklého rotací grafu asteroidy kolem osy* x.

Řešení. Ze symetrie asteroidy vyplývá, že celkový povrch získáme jak dvojnásobek povrchu tělesa vzniklého rotací prvního oblouku asteroidy kolem osy x:

$$\begin{aligned} P &= 2\left(2\pi\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{d}s\right) = 2\left(2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\,3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{12}{5}\pi a^2. \end{aligned}$$

$\square$