KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 5,

Určitý integrál 3

13. a 14. března 2017

1 Užití určitého integrálu ve fyzice

Hmotnost a těžiště rovinné desky

Mějme spojitou **kladnou** funkci f a uvažujme rovinnou desku ve tvaru základního obrazce (křivočarého lichoběžníku) pro $x \in \langle a, b\rangle$; nechť $\sigma(x)$ je plošná hustota materiálu (kolik váží čtverečná jednotka rovinné desky).

Je-li deska homogenní, potom $\sigma =$ konst. Hustota se může měnit jen ve směru osy x, ve směru osy y je konstantní.

Hmostnost desky tedy bude záviset na ploše a hustotě:

$$m = \int_a^b \sigma(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Statické momenty desky vzhledem k osám:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x) f^2(x)\,\mathrm{d}x, \qquad M_y = \int_a^b \sigma(x) x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Souřadnice těžiště $T[x_T, y_T]$ rovinné desky:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \sigma(x) x f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sigma(x) f(x)\,\mathrm{d}x}, \\ y_T &= \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x) f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sigma(x) f(x)\,\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Při obecnějším zadání

rovinné desky, kdy je deska ohraničena shora grafem funkce f, zdola grafem funkce g a ze stran přímkami $x = a$ a $x = b$. Taková množina se dá zapsat následovně:

$$B = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\Big\}.$$

Její hmotnost:

$$m(B) = \int_a^b \sigma(x)\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Statické momenty desky vzhledem k osám:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x)\left[f^2(x) - g^2(x)\right]\,\mathrm{d}x, \qquad M_y = \int_a^b \sigma(x) x\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Souřadnice těžiště $T[x_T, y_T]$ rovinné desky:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{M_y}{m} = \frac{\displaystyle\int_a^b \sigma(x) x\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \sigma(x)\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}, \\ y_T &= \frac{M_x}{m} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x)\left[f^2(x) - g^2(x)\right]\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \sigma(x)\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Při parametrickém zadání:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

máme těleso ohraničeno grafem, osou x a přímkami $x = \varphi(\alpha)$ a $x = \varphi(\beta)$.

Její hmotnost:

$$m = \left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Statické momenty desky vzhledem k osám:

$$M_x = \left|\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|, \qquad M_y = \left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Souřadnice těžiště $T[x_T, y_T]$ rovinné desky:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{M_y}{m} = \frac{\left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|}{\left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|}, \\ y_T &= \frac{M_x}{m} = \frac{\left|\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|}{\left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|}. \end{aligned} \tag{3}$$

Úloha 1.1. *Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního horního půlkruhu o poloměru $r > 0$ se středem v počátku.*

Řešení. Využijeme parametrického zadání:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) = r\cos t, \\ y &= \psi(t) = r\sin t, \end{aligned} \qquad t \in [0, \pi].$$

Homogenitu vyjádříme konstantní hustotou:

$$\sigma(t) \equiv c, \quad c > 0.$$

Vypočteme hmotnost:

$$\begin{aligned} m &= 2m_{\frac{1}{2}} = 2\left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| = 2\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} c\,r\sin t(r\cos t)'\,\mathrm{d}t\right| \\ &= 2c\,r^2\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right| = 2c\,r^2\left|-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t\right| \\ &= 2c\,r^2\left|-\left[\frac{1}{2}(t - \sin t\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| = 2c\,r^2\left|-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0\right) - 0\right]\right| \\ &= 2c\,r^2\left|-\frac{\pi}{4}\right| = c\frac{\pi\,r^2}{2}, \end{aligned}$$

tedy plocha půlkruhu krát plošná hustota.

Statický moment vzhledem k ose y by měl vyjít nulový, neboť deska je souměrná podle této osy a současně je homogenní:

$$\begin{aligned}
M_y &= \left|\int_\alpha^\beta \sigma(t)\varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^\pi c\,r\cos t\,r\sin t\,r(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= c\,r^3\left|-\int_0^\pi \sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t\right| = c\,r^3\left|-\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^\pi\right| \\
&= c\,r^3\left|-\frac{1}{3}\left[0-0\right]\right| = 0.
\end{aligned}$$

Statický moment vzhledem k ose x:

$$\begin{aligned}
M_x &= \left|\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{1}{2}\int_0^\pi c\,r^2\sin^2 t\,r(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{2}c\,r^3\left|\int_0^\pi \sin^2 t(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{2}c\,r^3\left|\int_0^\pi (1-\cos^2 t)(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{2}c\,r^3\left|\left[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^\pi\right| = \frac{1}{2}c\,r^3\left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3}c\,r^3.
\end{aligned}$$

Souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{0}{c\frac{\pi r^2}{2}} = 0, \qquad y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{2}{3}c\,r^3}{c\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} \doteq 0{,}42\,r.$$

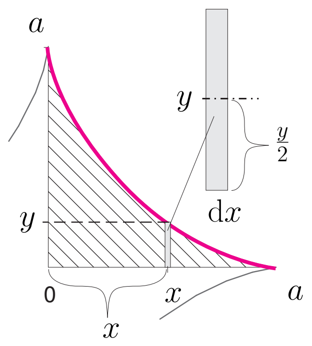
$$[x_T, y_T] = \left[0, \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right].$$

□

Úloha 1.2. *Určete těžiště „prvního kvadrantu“ asteroidy (viz obrázek 1).*

Řešení. Z dřívějška víme, že plocha (a tedy i hmotnost při jednotkové plošné hustotě $\sigma(t) \equiv 1$) prvního kvadrantu asteroidy je

$$m = \frac{1}{4}P = \frac{1}{4}\frac{3}{8}\pi a^2 = \frac{3}{32}\pi a^2.$$



Obrázek 1: Výpočet souřadnic těžiště rovinné desky — prvního kvadrantu asteroidy.

A opět ze symetrie

$$
\begin{aligned}
x_T &= y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\left|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma(t)\psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|}{m} \\
&= \frac{\left|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\left(a^2\sin^6 t\right)\left(3a\cos^2 t(-\sin t)\right)\,\mathrm{d}t\right|}{\frac{3}{32}\pi a^2} = \frac{\left|\frac{3}{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right|}{\frac{3}{32}\pi a^2} \\
&= \frac{16a}{\pi}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2)^3\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t\right|.
\end{aligned}
$$

Nejprve vypočteme neurčitý integrál:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2)^3\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u &=& \cos t \\ \mathrm{d}u &=& -\sin t\,\mathrm{d}t \\ -\mathrm{d}u &=& \sin t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \int(1-u^2)^3u^2(-\mathrm{d}u) = \int(1-3u^2+3u^4-u^6)u^2(-\mathrm{d}u) \\
&= \int(u^8-3u^6+3u^4-u^2)\mathrm{d}u = \frac{u^9}{9} - 3\frac{u^7}{7} + 3\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{1}{9}\cos^9 t - \frac{3}{7}\cos^7 t + \frac{3}{5}\cos^5 t - \frac{1}{3}\cos^3 t + C, \quad t\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Dosadíme:

$$\begin{aligned}
x_T &= y_T = \frac{16a}{\pi}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2)^3\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{16a}{\pi}\left|\left[\frac{1}{9}\cos^9 t-\frac{3}{7}\cos^7 t+\frac{3}{5}\cos^5 t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi/2}\right| \\
&= \frac{16a}{\pi}\left|\left(\frac{1}{9}\cdot 0-\frac{3}{7}\cdot 0+\frac{3}{5}\cdot 0-\frac{1}{3}\cdot 0\right)-\left(\frac{1}{9}\cdot 1-\frac{3}{7}\cdot 1+\frac{3}{5}\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 1\right)\right| \\
&= \frac{16a}{\pi}\left|-\left(\frac{1}{9}-\frac{3}{7}+\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)\right|\frac{16a}{\pi}\left|-\frac{16}{315}\right| = \frac{256}{315}\cdot\frac{a}{\pi}\doteq 0{,}26a.
\end{aligned}$$

Těžiště prvního kvadrantu asteroidy má souřadnice

$$T=[x_T,y_T]=\left[\frac{256}{315}\cdot\frac{a}{\pi},\frac{256}{315}\cdot\frac{a}{\pi}\right]\doteq[0{,}26a,0{,}26a]\,.$$

□

Úloha 1.3 (Těžiště podgrafu, Př. 3.54 na str. 159)**.** *Určete hmotnost a souřadnice těžiště podgrafu funkce $y=4x(1-x)$, je-li plošná hustota*

a) konstantní $\sigma(x)\equiv 1$,

b) proměnlivá ve směru osy x: $\sigma(x)=x^2$.

Řešení. Jde o úseč paraboly nad osou x na úseku $x\in[0;1]$.

ad a) Máme tedy funkci $f(x)=4x(1-x)$, $\sigma=1$, $a=0$ a $b=1$.

Hmotnost homogenního rovinného útvaru:

$$\begin{aligned}
m &= \int_a^b\sigma(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 1\cdot 4x(1-x)\,\mathrm{d}x=4\int_0^1(x-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= 4\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=4\left[\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)-0\right]=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Dále vypočteme statické momenty:

$$
\begin{aligned}
M_x &= \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x) \cdot y^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 1 \cdot [4x(1-x)]^2 \,\mathrm{d}x = 8\int_0^1 x^2(1-x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 8\int_0^1 x^2(1-2x+x^2) \,\mathrm{d}x = 8\int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) \,\mathrm{d}x \\
&= 8\left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{15}, \\
M_y &= \int_a^b \sigma(x) \cdot xy \,\mathrm{d}x = \int_a^b 1 \cdot x[4x(1-x)] \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Souřadnice těžiště $T[x_T, y_T]$:

Z homogenity a souměrnosti plyne, že $x_T = \frac{1}{2}$. Ověříme

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Dále

$$y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{15}\frac{3}{2} = \frac{2}{5}.$$

Uvažovaná rovinná deska má hmotnost $\frac{2}{3}$ a těžiště $T\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right]$.

ad b) Zde je jediná změna, $\sigma(x) = x^2$. Jinak zůstává $f(x) = 4x(1-x)$, $a = 0$ a $b = 1$.

Hmotnost nehomogenního rovinného útvaru:

$$m = \int_a^b \sigma(x) \cdot f(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \cdot 4x(1-x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}.$$

Dále vypočteme statické momenty:

$$
\begin{aligned}
M_x &= \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x) \cdot y^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \cdot [4x(1-x)]^2 \,\mathrm{d}x = \frac{8}{105}, \\
M_y &= \int_a^b \sigma(x) \cdot xy \,\mathrm{d}x = \int_a^b x^2 \cdot x4x(1-x) \,\mathrm{d}x = \frac{2}{15}.
\end{aligned}
$$

Souřadnice těžiště $T[x_T, y_T]$:

Z nehomogenity plyne, že x_T se oproti homogennímu případu posune doprava. Ověříme

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{3}.$$

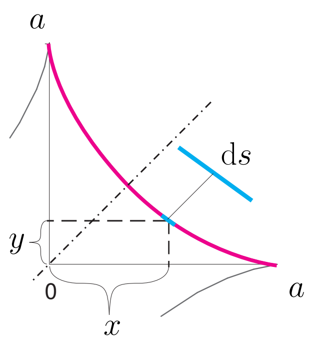
Dále

$$y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{8}{105}}{\frac{1}{5}} = \frac{8}{105}\frac{5}{1} = \frac{8}{21}.$$

Uvažovaná rovinná deska má hmotnost $\frac{1}{5}$ a těžiště $T\left[\frac{2}{3}, \frac{8}{21}\right]$.

$\square$

Hmotnost a souřadnice těžiště křivky



Obrázek 2: Grafická ilustrace výpočtu souřadnic těžiště křivky (oblouku). $\mathrm{d}s = \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t$ pro parametricky zadanou křivku a $\mathrm{d}s = \sqrt{\left[1 + \left[f'(x)\right]^2\right.}\,\mathrm{d}x$ pro explicitně zadanou křivku.

Zde je to podobné jako u rovinné desky, jen místo plochy budeme pracovat s délkou.

Explicitně zadaná křivka

Křivku máme zadánu jako úsek grafu funkce $y = f(x)$ na intervalu $x \in [a, b]$. Dále uvažujeme její délkovou hustotu závislou ne x, tedy $\sigma(x)$.

Její hmotnost bude odpovídat její délce a hustotě:

$$m = \int_a^b \sigma(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Statické momenty:

$$M_x = \int_a^b f(x) \cdot \sigma(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, \mathrm{d}x,$$

$$M_y = \int_a^b x \cdot \sigma(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, \mathrm{d}x.$$

Souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x \cdot \sigma(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, \mathrm{d}x}{\int_a^b \sigma(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, \mathrm{d}x},$$

$$y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sigma(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, \mathrm{d}x}{\int_a^b \sigma(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, \mathrm{d}x}.$$

Parametricky zadaná křivka

Uvažujme rovinnou křivku o délkové hustotě $\sigma(t)$ danou parametricky rovnicemi

$$\begin{array}{rcl} x & = & \varphi(t), \\ y & = & \psi(t), \end{array} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Pak její hmotnost získáme pomocí následujícího vzorce:

$$m = \int_\alpha^\beta \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t.$$

Statické momenty:

$$M_x = \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t.$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cdot \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t.$$

A konečně souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_\alpha^\beta \varphi(t) \cdot \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t}{\int_\alpha^\beta \sigma(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t},$$

$$y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\sigma(t)\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t}{\int_\alpha^\beta \sigma(t)\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t}.$$

Úloha 1.4. *Určete těžiště jednoho oblouku asteroidy.*

Řešení. Z dřívějška víme, že délka (a tedy i hmotnost při jednotkové délkové hustotě) jednoho oblouku asteroidy je

$$m = s = \frac{3}{2}a.$$

Vzhledem k tomu, že uvažovaný oblouk asteroidy leží v prvním kvadrantu a je symetrický vzhledem k ose prvního a třetího kvadrantu (viz obrázek), tak jeho těžiště leží na této ose, takže $y_T = x_T$.

$$\begin{aligned} y_T &= x_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}s}{s} = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\; 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}a} \\ &= 2a\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t = 2a\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = 2a\left(\frac{1}{5} - 0\right) = \frac{2}{5}a\,. \end{aligned}$$

Těžiště prvního oblouku asteroidy tedy leží v bodě $T = \left[\frac{2}{5}a; \frac{2}{5}a\right]$. □

Úloha 1.5 (Př. 3.51 na str. 156 skript)**.** *Určete hmotnost a souřadnice těžiště křivky G, která je grafem funkce $f : y = \frac{1}{2}x^2$, $x \in [0;1]$, je-li délková hustota $\sigma(x) = x$.*

Řešení. Jedná se o explicitně zadanou křivku s proměnlivou hustotou. Její hmotnost vypočteme podle vzorce

$$m = \int_a^b \sigma(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x,$$

tedy

$$m = \int_0^1 x\sqrt{1 + \left[x\right]^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nejprve vypočteme neurčitý integrál:

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = 1+x^2, \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x, \\ \frac{\mathrm{d}t}{2} = x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Získanou primitivní funkci využijeme ve výpočtu určitého integrálu:

$$m = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{(1+1^2)^3}\right) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{(1+0^2)^3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\sqrt{2^3}\right) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{1}\right) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1) \doteq 0{,}61.$$

Podobně statické momenty budeme počítat pomocí příslušných vzorců, kdo po dosazení dostáváme:

$$M_x = \int_a^b f(x)\cdot\sigma(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \cdot x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

a

$$M_y = \int_a^b x\cdot\sigma(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cdot x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Najdeme primitivní funkci potřebnou pro výpočet M_x:

$$I = \int \frac{1}{2}x^2\cdot x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = 1+x^2, \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x, \\ \frac{\mathrm{d}t}{2} = x\,\mathrm{d}x \\ x^2 = t-1 \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2}(t-1)\sqrt{t}\frac{\mathrm{d}t}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \left(t\sqrt{t}-\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{(1+x^2)^5} - \frac{1}{6}\sqrt{(1+x^2)^3} + C, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Máme tedy

$$M_x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \cdot x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}\sqrt{(1+x^2)^5} - \frac{1}{6}\sqrt{(1+x^2)^3}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}-1}{15} \doteq 0{,}16.$$

Integrál

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

potřebný pro výpočet M_y neumíme (se znalostmi, které jsme si řekli) vypočíst, ale bylo by škoda se v tuto chvíli vzdát. Můžeme využít přibližného numerického výpočtu určitého integrálu (viz teorii uvedenou dále v tomto textu), nebo pohodlně využijeme WolframAlpha na `www.wolframalpha.com`. Výpočet neurčitého integrálu zadáme následovně:

```
int(x^2*sqrt(1+x^2),x)
```

Pro výpočet určitého jen přidáme meze

```
int(x^2*sqrt(1+x^2),x=0..1).
```

Dostaneme výsledek

$$M_y = \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(3\sqrt{2} - \operatorname{argsh} 1\right) \doteq 0.42.$$

Funkci argsh jsme si nepředstavili, a tak uvedeme ještě výsledek z jiného softwaru:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(3\sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right).$$

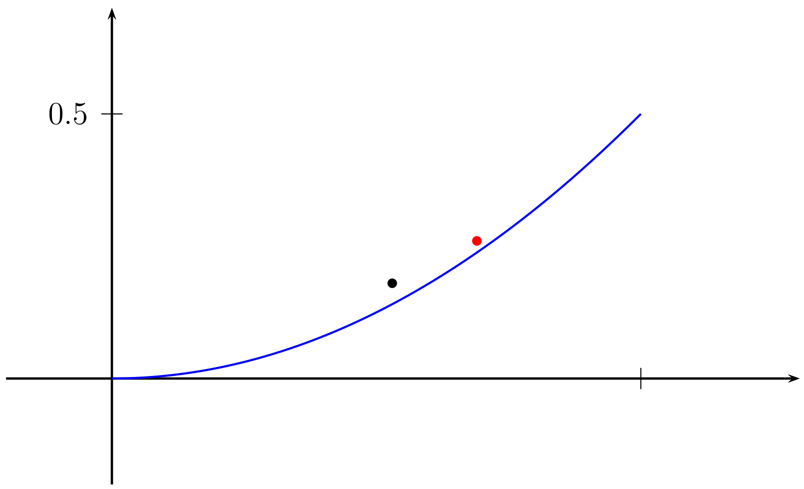
Celkově tedy (přibližně) máme souřadnice těžiště křivky:

$$x_T = \frac{M_y}{m} \doteq \frac{0{,}42}{0{,}61} \doteq 0{,}69,$$

$$y_T = \frac{M_x}{m} \doteq \frac{0{,}16}{0{,}61} \doteq 0{,}26.$$

Křivka má těžiště v bodě $T \doteq [0{,}69; 0{,}26]$. Situaci si můžete prohlédnout na obrázku 1.5, kde je uvedeno i umístění těžiště při konstantní hustotě (homogenní křivka). Souřadnice jsou v tomto případě $T_{hom} \doteq [0{,}53; 0{,}18]$.

□



Obrázek 3: Ilustrace k úloze 1.5. Graf funkce–křivky $f: y = \frac{1}{2}x^2$, $x \in [0; 1]$. Červená tečka znázorňuje umístění těžiště této křivky s proměnlivou hustotou $\sigma(x) = x$. Pro srovnání je uvedena i černá tečka, která představuje umístění těžiště při konstantní hustotě.

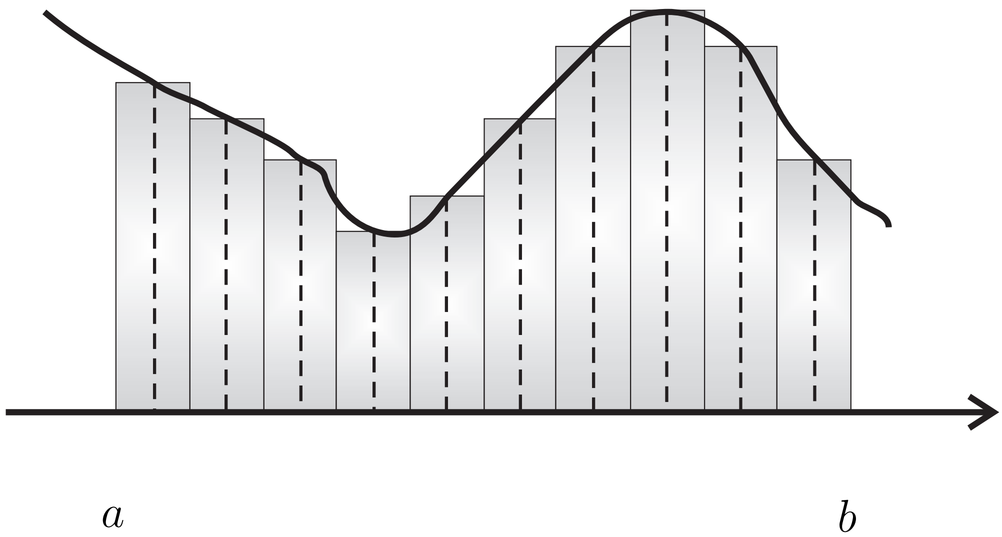
2 Přibližné metody výpočtu určitého integrálu

Pokud nejsme schopni určit primitivní funkci, existuje ještě možnost numerického přibližného výpočtu určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ s omezeným intervalem (a,b) a na něm omezenou funkcí f.

Existují různě složité metody výpočtu. Uvedeme si jen dvě nejjednodušší, obdélníkovou a lichoběžníkovou.

Předpokládáme-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a,b\rangle$, jde při výpočtu určitého integrálu o výpočet obsahu tzv. základního obrazce (oblast ohraničená grafem funkce, osou x a přímkami $x=a$ a $x=b$).

Metoda obdélníková



Obrázek 4: Obdélníková metoda

Princip této metody je znázorněn na obrázku 4) a spočívá v tom, že určitý integrál nahradíme součtem obsahů vhodně zvolených obdélníků. Interval $[a,b]$ rozdělíme pomocí bodů

$$a=x_0,\ x_1,\ \ldots,x_{n-1},\ x_n=b, \qquad n\in\mathbb{N},$$

na n (zpravidla) stejně velkých intervalů o délce

$$h=\frac{b-a}{n}.$$

Nad každým z nich sestrojíme obdélník s výškou danou vhodnou funkční hodnotou integrované funkce. Na obrázku jsou použity funkční hodnoty v prostředních bodech našich intervalů. Podobně můžeme volit i třeba hodnoty v levých krajních bodech intervalů. Každopádně tyto body označíme ξ_i, $i = 1, \ldots, n$. Pokud máme "slušnou"funkci a dělení je dostatečně jemné, můžeme získat dobrý odhad velikosti plochy–určitého integrálu.

(Přesnější teorii, zejména odhad chyby takového přibližného výpočtu, najdete ve skriptech na straně 204.)

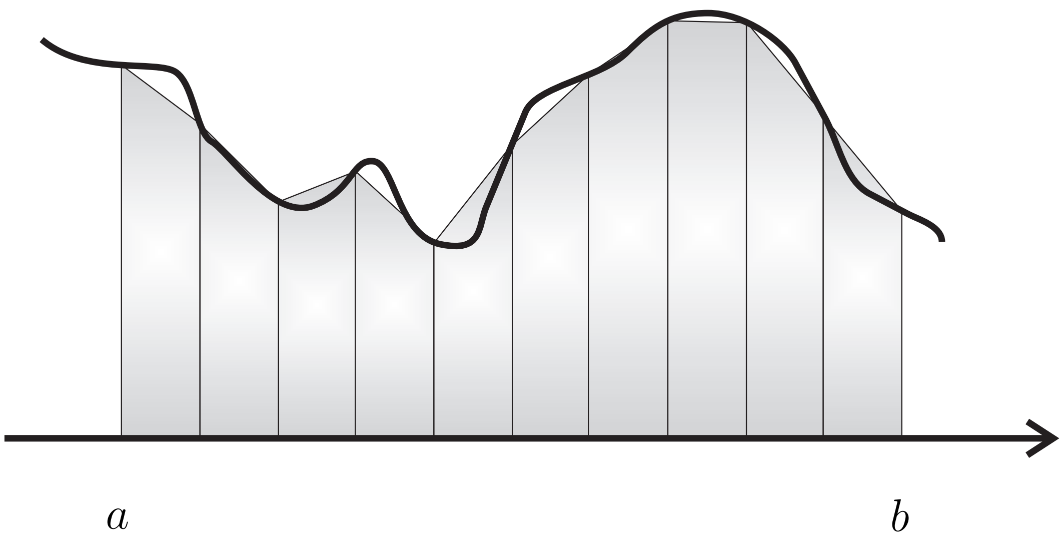
Pro obdélníkovou metodu tak máme vzorec

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i),$$

tedy pokud konkrétně volíme levé krajní body intervalů ($\xi_i = x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, dostáváme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}),$$

Metoda lichoběžníková



Obrázek 5: Lichoběžníková metoda

Princip této metody spočívá v tom, interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na n stejných elementů a funkci nahradíme lomenou čarou (viz obr. 5). Obsah základního obrazce pak přibližně nahradíme součtem obsahů elementárních lichoběžníků se základnami $f(x_{i-1}), f(x_i)$ a s výškou $h = \dfrac{b-a}{n}$. Tedy

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big[f(x_{i-1}) \;+\; f(x_i)\Big] = h\left[\frac{f(x_0)}{2} \;+\; \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \;+\; \frac{f(x_n)}{2}\right].$$