

KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 6,

Funkce dvou proměnných

20. a 21. března 2017

1 Funkce dvou (více) proměnných

Širší teorii funkcí více proměnných najdete na adrese

<http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/fceviceprom.html>.

Podstatné části zaměřené na funkce dvou proměnných uvádím zde:

Definice 1.1. *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $M \neq \emptyset$. Funkcí dvou proměnných budeme rozumět každé zobrazení*

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Množinu M nazýváme definičním oborem funkce f a značíme $D(f)$.

Poznámka 1.2. 1. *Pro funkci dvou proměnných volíme značení*

$$z = f(x, y).$$

2. *Proměnné x a y nazýváme nezávisle proměnné, z je závisle proměnná.*

3. *Není-li dán definiční obor, pak se jím rozumí nejširší přípustná množina v \mathbb{R}^2 .*

Příklad 1.3. *Určete definiční obor funkce $z = x^2 + y^2$.*

Řešení. Funkce (její předpis) neklade žádná omezení na x a y , a tak je

$$D(f) = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

tedy všechny uspořádané dvojice reálných čísel, resp. celá rovina xy . □

Další úlohy na určení definičního oboru funkce dvou proměnných najdete na

homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_4_1.pdf.

Parciální derivace

Funkce

$$z = f(x, y)$$

má dvě proměnné. Chceme-li na ni uplatnit definici derivace funkce jedné proměnné, můžeme ji derivovat jen podle jedné proměnné a druhou fixovat (v takovém případě považujeme druhou proměnnou za konstantu).

Definice 1.4. Říkáme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ parciální derivaci podle x , jestliže existuje (vlastní) limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Podobně říkáme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ parciální derivaci podle y , jestliže existuje (vlastní) limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

1. Obvyklé značení pro parciální derivaci funkce f podle x (podle y) v bodě $A = [x_0, y_0]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(A), \quad f'_x(x_0, y_0) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A), \quad f'_y(x_0, y_0) \right).$$

2. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

jsou opět funkce proměnných x a y , s definičními obory

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \subseteq D(f), \quad D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \subseteq D(f).$$

3. Při výpočtu parciálních derivací používáme stejná pravidla jako u obyčejných derivací (derivace součtu, součinu, ...).

Parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

- Smíšené parciální derivace druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Záměnnost smíšených parciálních derivací:

Věta 1.5. *Jsou-li smíšené parciální derivace*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak jsou si v tomto bodě rovny:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A).$$

Příklad 1.6. *Určete parciální derivace prvního a druhého řádu funkce*

$$f(x, y) = 3x^4 - 2xy + xy^2 + y^6.$$

Řešení: Nejprve určíme definiční obor funkce f . Zřejmě

$$D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^4 - 2xy + xy^2 + y^6) = 12x^3 - 2y + y^2 + 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^4 - 2xy + xy^2 + y^6) = 0 - 2x + 2xy + 6y^5.$$

Parciální derivace druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x}(12x^3 - 2y + y^2) = 36x^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y}(-2x + 2xy + 6y^5) = 2x + 30y^4;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x}(-2x + 2xy + 6y^5) = -2 + 2y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y}(12x^3 - 2y + y^2) = -2 + 2y.$$

Definiční obory:

$$D \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \mathbb{R}^2.$$

□

- Řadu dalších úloh najdete na homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_1.pdf.

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Nejprve si lokální extrém funkce dvou proměnných definujeme:

Definice 1.7 (lokální extrémy). *Řekneme, že funkce*

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

nabývá v bodě $A \in D(f)$ lokálního maxima, jestliže existuje okolí

$$\mathcal{O}(A) \subseteq D(f)$$

bodu A takové, že

$$\text{pro všechna } X \in \mathcal{O}(A) \text{ platí } f(X) \leq f(A).$$

Řekneme, že funkce

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

nabývá v bodě $A \in D(f)$ lokálního minima, jestliže existuje okolí

$$\mathcal{O}(A) \subseteq D(f)$$

bodu A takové, že

$$\text{pro všechna } X \in \mathcal{O}(A) \text{ platí } f(X) \geq f(A).$$

Definice 1.8 (stacionární bod). Řekneme, že bod $A \in \mathbb{R}^2$ je stacionárním bodem funkce $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže v něm jsou obě parciální derivace prvního řádu funkce f nulové, tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0.$$

Podobně jako u funkce jedné proměnné platí:

Věta 1.9. Necht' $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ má v A lokální extrém a necht' f má v A obě parciální derivace.

Pak nutně A je stacionárním bodem f .

- Tato věta nevylučuje možnost, že lokální extrém nastane v bodě který není stacionárním, ale nesmí v něm alespoň jedna parciální derivace existovat (pokud ale nějaká existuje, musí být nulová).

Určování lokálních extrémů funkce dvou proměnných

- Označme:

$$D_1(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad D_2(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

hlavní determinanty matice parciálních derivací druhého řádu.

Postačující podmínky pro existenci ostrého lokálního extrému funkce f ve stacionárním bodě A :

Věta 1.10. Necht' funkce $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ je na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ dvakrát spojitě diferencovatelná. Necht' bod A je její stacionární bod.

1) Jestliže

$$D_2(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2 > 0,$$

pak má funkce f v bodě A ostrý lokální extrém.

Je-li navíc

$$D_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0,$$

jedná se o ostré lokální minimum, je-li

$$D_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0,$$

jedná se o ostré lokální maximum.

- Je-li $D_2(A) < 0$, potom funkce f v A lokální extrém nemá.
- V případě $D_2(A) = 0$ nelze takto o existenci lokálního extrému rozhodnout.

Příklad 1.11. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Řešení: 1. *Definiční obor:* funkce je definována na celé rovině xy , tedy $D(f) = \mathbb{R}^2$.

2. *Parciální derivace prvního řádu:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Obě parciální derivace jsou definovány a spojité na celé rovině xy .

3. *Stacionární body:*

$$2x = 0 \quad \wedge \quad 2y = 0 \quad \implies \quad A = [0, 0].$$

4. *Parciální derivace druhého řádu:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

Všechny parciální derivace druhého řádu jsou definovány a spojité na celé rovině xy .

5. *Hlavní determinanty:*

$$D_1(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad D_2(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

6. *Hodnota hlavních determinantů ve stacionárním bodě $A = [0, 0]$:*

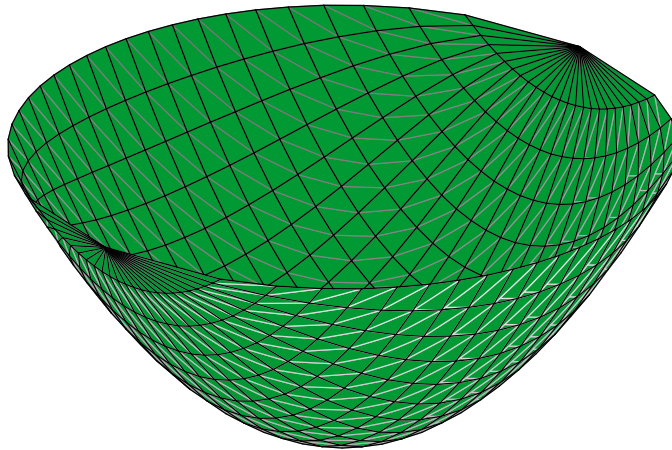
$$D_1(0, 0) = 2 > 0, \quad D_2(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0.$$

7. *Vyhodnocení:*

$$D_2(A) > 0 \quad \wedge \quad D_1(A) > 0,$$

a tak má funkce f v bodě $A = [0, 0]$ ostré lokální minimum o hodnotě $f(A) = f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$.

8. *Další lokální extrémý (mimo stacionární body):* Vzhledem k tomu, že obě parciální derivace existují v celé rovině, mohou lokální extrémý nastat pouze ve stacionárních bodech, a tak funkce f žádný další lokální extrém nemá.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v okolí bodu $[0, 0]$, kde má tato funkce lokální minimum 0.

□

Příklad 1.12. *Určete lokální extrémý funkce*

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Řešení: 1. *Definiční obor:* funkce je definována na celé rovině xy , tedy $D(f) = \mathbb{R}^2$.

2. *Parciální derivace prvního řádu:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou definovány a spojité na celé rovině xy , takže lokální extrémů mohou nastat pouze ve stacionárních bodech funkce f .

3. *Stacionární body:*

$$2x = 0 \quad \wedge \quad -2y = 0 \quad \implies \quad A = [0, 0].$$

4. *Parciální derivace druhého řádu:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

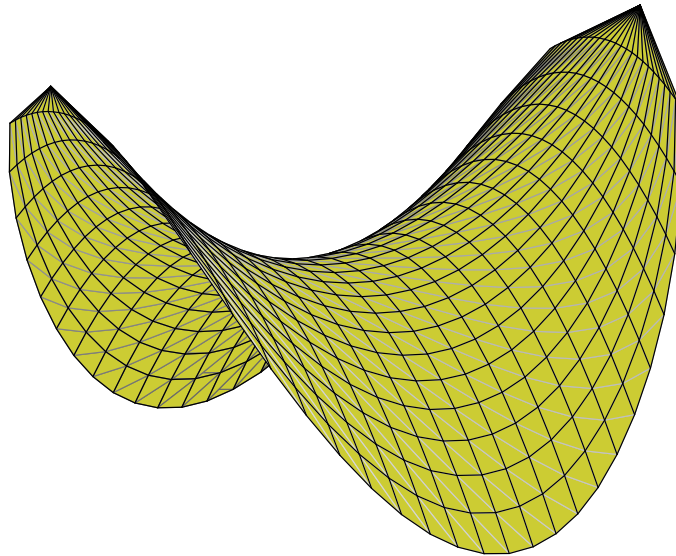
Všechny parciální derivace druhého řádu jsou definovány a spojité na celé rovině xy .

5. *Hlavní determinanty:*

$$D_1(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad D_2(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

6. *Hodnota hlavních determinantů ve stacionárním bodě $A = [0, 0]$:*

$$D_1(0, 0) = 2 > 0, \quad D_2(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = -4 < 0.$$



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ v okolí bodu $[0, 0]$, kde tato funkce lokální extrém nemá. Plocha má tvar sedla (v jednom směru lokální maximum, ve druhém lokální minimum).

7. *Vyhodnocení:*

$$D_2(A) < 0,$$

a tak funkce f v bodě $A = [0, 0]$ lokální extrém nemá.

Skutečně, $f(0, 0) = 0$ a v libovolném okolí bodu $A = [0, 0]$ má funkce f jak záporné ($x = 0 \wedge y \neq 0$), tak i kladné hodnoty ($y = 0 \wedge x \neq 0$).

□

Příklad 1.13. *Určete lokální extrémy funkce*

$$f(x, y) = x^2 + 6|y|.$$

Řešení: 1. *Definiční obor:* funkce je definována na celé rovině xy , tedy $D(f) = \mathbb{R}^2$.

2. *Parciální derivace prvního řádu:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} -6, & \text{pro } y < 0, \\ \text{neexistuje} & \text{pro } y = 0, \\ 6, & \text{pro } y > 0. \end{cases}$$

Parciální derivace podle x je definována a spojitá na celé rovině xy , zatímco parciální derivace podle y neexistuje na přímce $y = 0$ (mimo tuto přímku je v celé rovině definována a spojitá).

Hledání lokálních extrémů budeme tedy provádět různě ve dvou oblastech, na přímce $y = 0$ a mimo ni.

- (a) Mimo přímku $y = 0$ obě parciální derivace existují, tudíž zde může nastat lokální extrém pouze ve stacionárním bodě. Vzhledem k tomu, že parciální derivace podle y je zde vždy nenulová (nabývá hodnot ± 6), žádný stacionární bod zde neexistuje, a tak ani lokální extrém.
- (b) Na přímce $y = 0$ neexistuje parciální derivace podle y , a tak lokální extrémy na ní nemůžeme vyšetřovat standardně podle naší věty. Při analýze chování funkce f na přímce $y = 0$ (a v jejím okolí) budeme postupovat následovně:

- i. Nejprve si uvědomíme, že funkce f je spojitá v celé rovině xy .
- ii. Když je v daném bodě parciální derivace podle x nenulová, znamená to, že funkční hodnoty ve směru osy x v daném bodě rostou nebo klesají, a tak zde nemůže být lokální extrém. Když tedy existuje parciální derivace podle x , musí být v lokálním extrému nulová. Na přímce $y = 0$ je parciální derivace podle x nulová pouze v bodě $A = [0, 0]$. Jediným kandidátem na lokální extrém je tedy tento bod.
- iii. Vzhledem k tomu, že

$$f(0, 0) = 0^2 + 6|0| = 0 \quad \text{a} \quad f(x, y) > 0 \quad \text{pro } (x, y) \neq (0, 0),$$

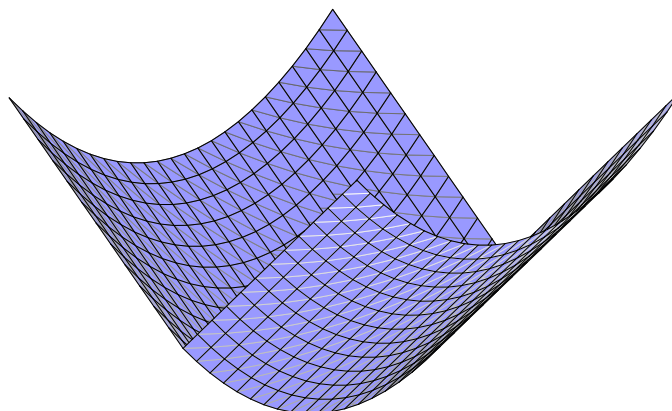
tak rychle zjišťujeme, že v bodě $[0, 0]$ nabývá funkce f svého lokálního minima 0.

□

- Řadu příkladů (řešených i neřešených s výsledky) najdete na adrese:
homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_6_1.pdf.

1.0.1 Několik příkladů „na lokální extrémy“

Najděte lokální extrémy funkcí:



Obrázek 3: Graf funkce $f(x, y) = x^2 + 6|y|$ v okolí bodu $[0, 0]$, kde tato funkce má lokální minimum 0. Na přímce $y = 0$ pro funkci f neexistuje její parciální derivace podle proměnné y (ostrý hřbet plochy).

1. $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$ [LMax v $(1, 1)$]
2. $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ [LMin v $(-2, 0)$]
3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ [LMin v $(0, 0)$]
4. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ [LMin v $(1, 4)$]
5. $f(x, y) = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$ [LMax v $(6, 4)$]
6. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ [LMax v $(-2, -1)$, LMin v $(2, 1)$]
7. $f(x, y) = 2y^3 + x^2y + x^2 + 5y^2$ [LMin v $(0, 0)$ a LMax v $(0, \frac{-5}{3})$]