KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 7,

Obyčejné diferenciální rovnice 1

27. a 28. března 2017

1 Úvodní motivační příklad

Po prostudování této kapitoly zjistíte, k čemu mohou být diferenciální rovnice užitečné. Jak se pomocí nich dá modelovat praktický problém, jak může vypadat jejich řešení a co nám přináší jeho další zkoumání.

Praktická motivace je vždy ta nejlepší. Spojením s fyzikou volného pádu si uvědomíme, že diferenciální rovnice skutečně nejsou „jen dalším matematickým výmyslem určeným na terorizování studentů“.

Než si přesně nadefinujeme, co to vlastně obyčejné diferenciální rovnice jsou, uvedeme si jeden ilustrační příklad.

Příklad 1.1 (Vrh tělesem svisle dolů). *Těleso o hmotnosti m vrhneme svisle dolů s počáteční rychlostí v_0 a budeme zkoumat, jak se mění jeho rychlost $v = v(t)$ v následujícím čase $t \geq 0$, jestliže počítáme s odporem vzduchu s koeficientem $k(> 0)$.*

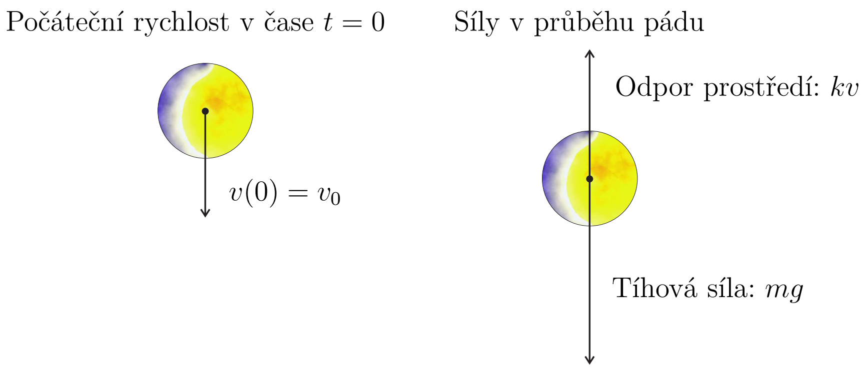
Řešení: Pokud si nejste moc jisti svými fyzikálními znalostmi (a chcete s tím něco dělat), tak doporučuji dvě videa z cyklu České televize „Rande s fyzikou“. První je věnováno Newtonovým zákonům[1]a druhé zrychlení a volnému pádu[2].

Na padající těleso působí zemská tíže (urychluje pád) a současně odpor vzduchu (zpomaluje pád). Zatímco zemskou tíži považujeme za konstantní (mg), tak odpor vzduchu závisí přímo úměrně na aktuální rychlosti (kv). Jiné síly působící na těleso neuvažujeme.

---

[1] `http://www.ceskatelevize.cz/porady/10319921345-rande-s-fyzikou/211563230150003-newtonovy-zakony/video/`

[2] `http://www.ceskatelevize.cz/porady/10319921345-rande-s-fyzikou/211563230150002-zrychleni-a-volny-pad/video/`



Obrázek 1: Grafické znázornění situace padajícího tělesa.

Pokud na těleso působí nějaká nenulová síla, uděluje mu zrychlení. Závislost této síly F, hmotnosti tělesa m a jeho zrychlení a popisuje druhý Newtonův zákon:

$$m \cdot a = F.$$

Hmotnost tělesa m je dána, zrychlení $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ vyjádříme jako derivaci aktuální rychlosti a $F = mg - kv$ je součet uvažovaných sil (síla působící směrem k Zemi je brána kladně, v opačném směru záporně). Po dosazení do rovnice druhého Newtonova zákona:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv. \tag{1}$$

V této rovnici se vyskytuje derivace neznámé (hledané) funkce $v = v(t)$ a je to příklad tzv. lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Rovnice tohoto typu se v průběhu semestru naučíme řešit (=najít funkce, které dané rovnici vyhovují). V tuto chvíli si ukážeme, k čemu lze při řešení takové rovnice dojít. Uvedeme si jednoparametrickou třídu funkcí, které všechny (se svými derivacemi) vyhovují rovnici (1) pro $t \geq 0$:

$$v = v(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \qquad c \in \mathbb{R},\ t \in [0, \infty)\,. \tag{2}$$

Zkusme tuto skutečnost ověřit. Abychom mohli dosadit řešení (2) do rovnice (1), potřebujeme vypočíst derivaci rychlosti

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left[c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right]' = -c\frac{k}{m} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\,.$$

Dosadíme do levé strany (1) a upravíme:

$$L = m \cdot \left(-c\frac{k}{m} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right) = -c \cdot k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\,.$$

Podobně pro pravou stranu (1) po dosazení dostaneme:

$$P = mg - k\left(c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right) = -c \cdot k \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

Tedy $L = P$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ a $t \in [0, \infty)$.

Jelikož $c \in \mathbb{R}$, existuje nekonečně mnoho řešení (funkcí), které vyhovují rovnici (1) na intervalu $[0, \infty)$. Čím se liší? Co představují? Jak mezi nimi rozlišovat? Klíčem bude zatím nezapočítaná počáteční rychlost v_0. Mezi všemi možnými řešeními budeme vybírat jen ta, která splňují počáteční podmínku $v(0) = v_0$. Uvidíme, že bude právě jedno:

$$\begin{aligned} v(0) &= v_0, \\ c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}0} + \frac{mg}{k} &= v_0, \\ c + \frac{mg}{k} &= v_0, \\ c &= v_0 - \frac{mg}{k}. \end{aligned}$$

Dosadíme zpět do (2):

$$v = v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \qquad t \in [0, \infty). \tag{3}$$

Řešení (2) nazýváme obecné (zahrnuje všechna řešení), zatímco řešení (3) nazýváme partikulární.

Na závěr prozkoumáme dva limitní stavy partikulárního řešení, pro $k \to 0^+$ (zanedbání odporu vzduchu)

$$\lim_{0<k\to 0^+} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right] = v_0 + gt.$$

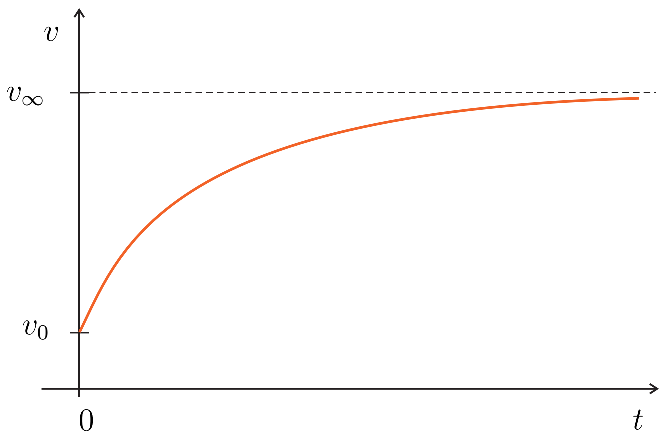
a pro $t \to \infty$ (limitní chování rychlosti v čase)

$$v_\infty := \lim_{t\to\infty} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right] = \frac{mg}{k}.$$

Zde je v_∞ limitní (konstantní) rychlost, při které se odpor vzduchu vyrovná s tíhovým zrychlením.

Na obrázku 2 je znázorněn vývoj rychlosti padajícího tělesa při počáteční rychlosti $v_0 < v_\infty$.

$\square$



Obrázek 2: Graf rychlosti padajícího tělesa $v = v(t)$, kde $v(0) = v_0$ značí počáteční rychlost a v_∞ je rychlost limitní.

2 Diferenciální rovnice — základní pojmy

Po prostudování této kapitoly již budete znát přesnou definici obyčejné diferenciální rovnice n-tého řádu (dokonce budete vědět i co je to ten řád) a jejího řešení. Budete umět ověřit, podle definice, zda nějaká daná funkce je řešením dané diferenciální rovnice.

Po vágním motivačním úvodu je třeba zamířit do bezpečí přesných definic.

Jak jsme si ilustrovali na předchozí ukázce, při praktických úlohách často potřebujeme nalézt neznámou funkci, jejíž vlastnosti jsou popsány pomocí jejích derivací, zasazených do nějaké rovnice. Takovou rovnici pak nazýváme *diferenciální rovnice.*

Poznámka 2.1. *V matematice i v aplikacích se pracuje*

- *s obyčejnými diferenciálními rovnicemi, to jsou ty, kde neznámá funkce je funkcí jedné nezávisle proměnné a derivace neznámé funkce je obyčejnou derivací,*
- *a také s parciálními diferenciálními rovnicemi, kde neznámá funkce je funkcí více proměnných a její derivace jsou tedy derivacemi parciálními.*

V tomto textu se budeme zabývat výhradně obyčejnými diferenciálními rovnicemi, a tak si občas budeme moci dovolit vynechat slovo „obyčejný“ a použít pouze termín „diferenciální rovnice“.

Rovnici

$$F(t, y, y', \dots y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

kde

- F je daná funkce $n+2$ proměnných, definovaná na nějaké množině

  $$G = I \times \Omega, \quad ,$$

  kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval[3] a $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
- $t \in I$ je nezávisle proměnná,
- $y = y(t)$ je neznámá funkce, a
- $y', \dots y^{(n)}$ jsou derivace této neznámé funkce y,

nazýváme *obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu.*

Řádem diferenciální rovnice (4) rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v (4) vyskytuje.

Speciálně, pro $n = 1$, tedy máme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu

$$F(t, y, y') = 0.$$

Nyní si ukážeme tři příklady jednoduchých diferenciálních rovnic, u kterých (jen se znalostí základů diferenciálního a integrálního počtu) budeme schopni určit alespoň některá řešení.

Příklad 2.2. *Hledáme funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 2t + \cos t$.*

Ukažme, že jde opravdu o diferenciální rovnici. Rovnici $y' = 2t + \cos t$ lze přepsat na $y' - 2t - \cos t = 0$, což můžeme psát jako $F(t, y, y') = 0$, kde funkci F definujeme předpisem

$$F(t, x_1, x_2) = x_2 - 2t + \cos t.$$

Potom skutečně $F(t, y, y') = y' - 2t - \cos t$, a tak dostáváme

$$F(t, y, y') = 0, \qquad I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}, \quad \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

tedy

$$G = I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Podle definice primitivní funkce je hledanou funkcí $y(t)$ každá funkce primitivní k zadané funkci $2t + \cos t$, tedy $y = t^2 + \sin t + C$, kde C je (libovolná) integrační konstanta a $t \in \mathbb{R}$. □

[3] Interval I může být různého tvaru, například (a, b), $[a, b]$, (a, ∞) nebo $(-\infty, \infty)$.

Příklad 2.3. *Najdeme funkci* $y = y(t)$*, pro niž platí* $y'' = -y$*.*
Nejprve opět určíme

$$F(t, y, y', y'') = y'' + y, \qquad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

Dále z vlastností derivací funkcí $\cos t$ *a* $\sin t$ *vidíme, že uvedená rovnice je splněna například pro funkci* $y_1 = \cos t$*, také pro funkci* $y_2 = \sin t$*, ale rovněž pro*

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad \textit{kde } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ve všech těchto případech nejsou na t *žádná definiční omezení (ani v zadání, ani u řešení), a tak můžeme opět vzít* $t \in \mathbb{R}$*.* □

Příklad 2.4. *Najdeme funkci* $y = y(t)$*, pro niž platí* $y' = 1$*, přičemž* $y(2) = 5$*.*
Určíme

$$F(t, y, y') = y' - 1, \qquad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Nejprve si všimněme jen rovnice $y' = 1$*; vyhovuje jí každá funkce* $y = t + C$*, kde* $t \in \mathbb{R}$ *a* C *je libovolná konstanta. Použijeme-li nyní uvedenou podmínku, dostaneme* $5 = 2 + C$*, a z toho* $C = 3$*. Takže funkce* $y = t + 3$*,* $t \in \mathbb{R}$*, vyhovuje jak uvedené rovnici, tak zadané podmínce.* □

V našich příkladech jde postupně o obyčejné diferenciální rovnice prvního, druhého a opět prvního řádu.

Je čas se ptát po přesnější definici pojmu řešení. Jelikož v diferenciální rovnici je neznámou funkce, množinou řešení takové rovnice je množina funkcí. Tyto funkce musí splňovat dva požadavky:

- musí se dát dosadit do rovnice;
  - tedy musí existovat všechny jejich potřebné derivace
  - a mohou nabývat jen takové hodnoty, aby byly v definičním oboru funkce F,
- po jejich dosazení musí být F identicky rovna nule.

Tyto požadavky hledané funkce nemusí splňovat všude ($\forall t \in I$), ale stačí na nějakém intervalu. Proto obvykle hovoříme o řešení diferenciální rovnice na intervalu.

Definice 2.5 (Řešení diferenciální rovnice). *Funkce φ, která je n-krát spojitě diferencovatelná na intervalu J, je* řešením diferenciální rovnice *(4) na J, jestliže pro každé $t \in J$ platí*

$$\Big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\Big) \in G \quad a \quad F\Big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\Big) = 0.$$

Z této definice vyplývá, že kromě řešení $y = \varphi(t)$ je také třeba určit interval $J \subset I$, na kterém je φ řešením. J nebudeme zjišťovat v tom případě, kdy bude odpovídat přirozenému definičnímu oboru funkce φ.

Poznámka 2.6 ([2]).

- *Řešení diferenciální rovnice prvního řádu $F(t, y, y') = 0$ se také nazývá* integrál diferenciální rovnice *a jeho graf v rovině (t, y) zase* integrální křivka.
- *Ne vždy se podaří nalézt řešení v explicitním tvaru, a tak integrální křivky mohou být dány i implicitně:*
  - *explicitně: $y = \varphi(t)$, $t \in J$,*
  - *implicitně: $H(t, y) = 0$, $(t, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.*
- *Řešit diferenciální rovnici znamená určit všechna její řešení. Ale ne každá taková rovnice musí být řešitelná.*
- *Množinu všech řešení naší diferenciální rovnice (4) nazýváme* obecné řešení.[4]
- *Obecné řešení (4) lze v některých případech (například u lineárních diferenciálních rovnic) vyjádřit ve tvaru*

$$y = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad kde \quad C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

- *Když z obecného řešení vybereme jedno konkrétní (například volbou konstant $C_1, C_2, \dots, C_n$), hovoříme o* partikulárním řešení[5].

[4]Někteří autoři do obecného řešení nezahrnují tzv. singulární řešení. To je definováno tak, že každým bodem integrální křivky odpovídající tomuto řešení prochází alespoň jedna další integrální křivka příslušné diferenciální rovnice. Příkladem singulárního řešení je funkce $y \equiv 0$ v příkladu 3.5 na straně 20 ve skriptech [1].

[5]Singulární řešení lze rovněž chápat jako partikulární řešení.

Příklad 2.7. *Zjistěte, zda funkce*

$$y = 1 + e^t + t - \frac{1}{2}t^2$$

je řešením diferenciální rovnice

$$y'' - y' - t = 0 \tag{5}$$

a na jaké množině (intervalu).

Řešení. Jde o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu, kde definiční obor funkce F (na levé straně rovnice (5)) je

$$G = I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

neboť $F(t, y, y', y'')$ je definována pro libovolné hodnoty svých argumentů.

Nabízená funkce je také definována pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Nyní vypočteme první a druhou derivaci nabízené funkce, abychom mohli výsledek dosadit do rovnice (5):

$$y'(t) = (1+e^t+t-\frac{1}{2}t^2)' = 0+e^t+1-t = e^t+1-t, \qquad y''(t) = (e^t+1-t)' = e^t-1.$$

Nyní dosadíme do (5):

$$L = y'' - y' - t = (e^t - 1) - (e^t + 1 - t) - t = -2 \neq 0 = P.$$

Daná funkce $y = 1 + e^t + t - \frac{1}{2}t^2$ tedy není řešením rovnice (5), neboť jsme nedostali identickou rovnost levé a pravé strany rovnice (5) na žádném intervalu pro t.

Když se ovšem zamyslíme, uvědomíme si, že cíl jsme minuli jen o „kousek“. Stačí upravit znaménko u t a jedničky se nám ve výsledku odečtou:

$$y = 1 + e^t - t - \frac{1}{2}t^2, \quad y'(t) = e^t - 1 - t, \qquad y''(t) = e^t - 1.$$

Tedy

$$L = y'' - y' - t = (e^t - 1) - (e^t - 1 - t) - t = 0 = P, \qquad \text{pro všechna} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Funkce $y = 1 + e^t - t - \frac{1}{2}t^2$ je tedy řešením rovnice (5) na $\mathbb{R}$ ($J = \mathbb{R}$). □

Další příklady:

Příklad 2.8. *Zjistěte, zda funkce*

$$y(t) = \frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{2}e^{-2t} + 6$$

je řešením diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' - \cos t = 0$$

a na jaké množině (intervalu).
[Ano, je řešením na celé reálné ose.]

Příklad 2.9. *Zjistěte, zda funkce*

$$y(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 5$$

je řešením diferenciální rovnice

$$y' - \sqrt{t} = 0$$

a na jaké množině (intervalu).
[Ano, je řešením pro $t \in [0, +\infty)$. *Tedy* $J = I = [0, +\infty)$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.*]*

Příklad 2.10. *Zjistěte, zda funkce*

$$y(t) = \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{2}t$$

je řešením diferenciální rovnice

$$2y'' - \frac{1}{t} = 0$$

a na jaké množině (intervalu).
[Ze zadání: $I = (-\infty, 0)$ *nebo* $I = (0, \infty)$ *a* $\Omega = \mathbb{R}^3$. *Nabízená funkce je řešením na intervalu* $J = (0, \infty)$.*]*

3 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Po této přednášce již vcelku bezpečně poznáte obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu a budete vědět, jak sestrojit její směrové pole.

Čekají Vás obrázky! Budou z Vás malíři diferenciálních rovnic.

Na předchozí přednášce jsme si uvedli, že obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu má obecný implicitní tvar

$$F(t, y, y') = 0.$$

Pro naše účely je to tvar zbytečně obecný. Úplně nám budou stačit rovnice, ve kterých je první derivace neznámé funkce vyjádřena explicitně (jsou zapsány v tzv. normálním tvaru):

$$y' = f(t, y). \tag{6}$$

Budeme předpokládat, že k rovnici (6) existují integrální křivky (grafy řešení) na nějaké množině

$$G = I \times \Omega, \quad I, \Omega \subset \mathbb{R},$$

kde je funkce f definována.

3.1 Geometrická interpretace obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu — směrové pole

Proměnné t a y z rovnice (6) můžeme chápat jako souřadnice bodu (t, y) v rovině ty.

Každému bodu $(t, y) \in G$ je přiřazena hodnota $f(t, y)$ a na základě vztahu (6) je tato hodnota spojena s derivací neznámé funkce y'. Vzhledem k tomu, že geometricky derivace udává směr, máme na G pomocí (6) definováno tzv. *směrové pole*

$$\Big\{\Big(t, y, f(t, y)\Big); (t, y) \in G\Big\},$$

kde uspořádaným trojicím $\Big(t, y, f(t, y)\Big)$ říkáme *lineární elementy.* Tyto se dají znázornit pomocí krátkých úseček se středem v (t, y) a se směrnicí $f(t, y)$.

Integrální křivky diferenciální rovnice (6) mají v každém bodě v G tečnu orientovanou shodně se směrovým polem (směrnice tečny v bodě (t, y) má hodnotu $f(t, y)$)

Křivky v G, ve kterých je

$$y' = f(t, y) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

se nazývají *izokliny.* (Lineární elementy „ležící“ na této křivce mají všechny stejnou směrnici c.)

Příklad 3.1 (Směrové pole)**.** *Znázorněte směrové pole diferenciální rovnice* $y' = \dfrac{y}{t}$*, a to pomocí izoklin. Dále načrtněte graf jednoho řešení.*

Řešení. Pravá strana $f(t, y) = \dfrac{y}{t}$ je definována pro $t \neq 0$ a $y \in \mathbb{R}$. Tím je dáno, že úlohu můžeme uvažovat na dvou oblastech:

$$G_1 = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}, \qquad \text{nebo} \qquad G_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Izokliny jsou ty křivky v G, na kterých je derivace y', a tedy i hodnoty $f(t, y)$, konstantní. Budeme je tedy hledat pomocí rovnice

$$\frac{y}{t} = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

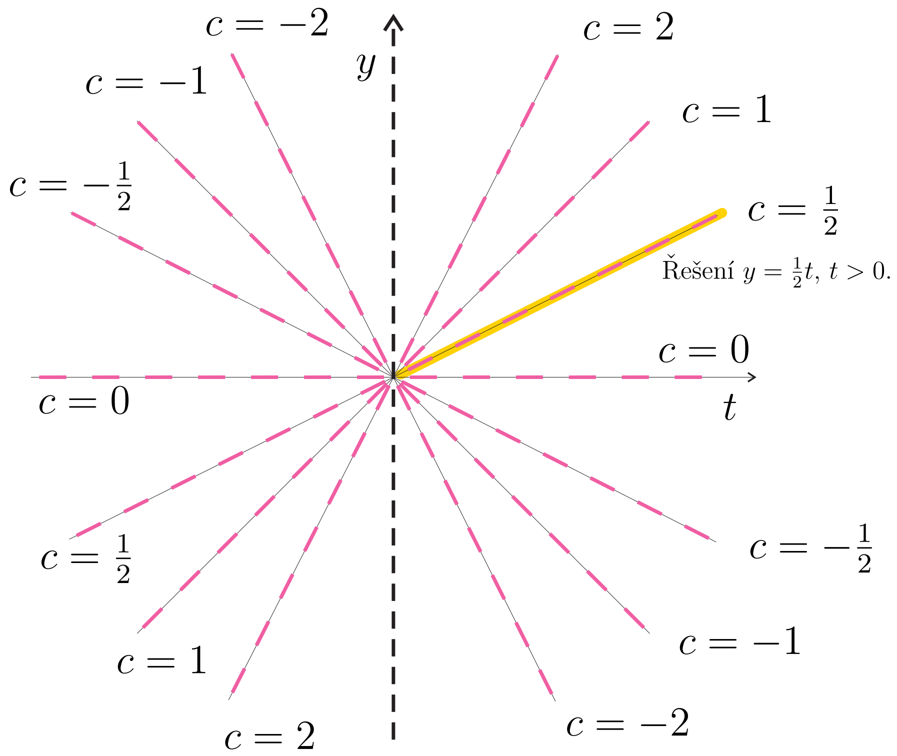
odkud (snažíme se explicitně vyjádřit závislost y na t)

$$y = ct, \quad c \in \mathbb{R}.$$

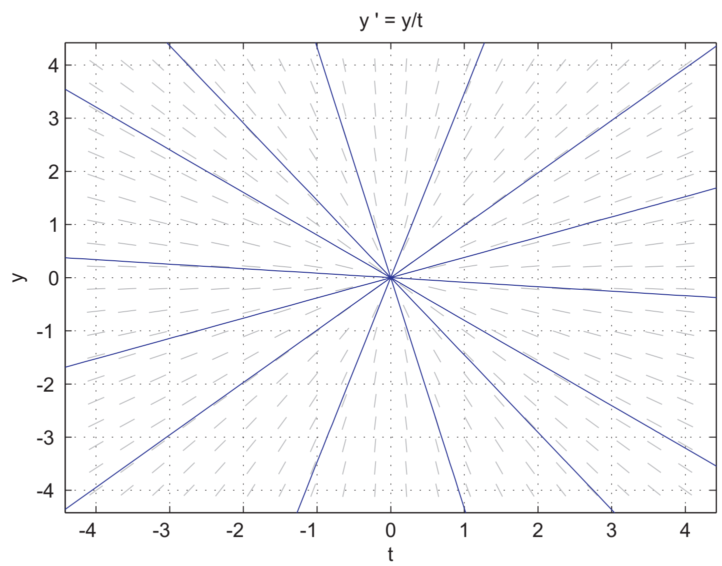
Pro každé $c \in \mathbb{R}$ jde o rovnici přímky, která prochází počátkem a má směrnici c. Když vezmeme v potaz podmínku $t \neq 0$ (resp. naše uvažované oblasti G_1 a G_2), tak dostaneme vždy dvě polopřímky, na kterých směrnice lineárních elementů mají totožnou hodnotu c. To znamená, že jsou v dané polopřímce obsaženy.

Současně z toho plyne, že i grafy řešení se s těmito polopřímkami shodují. Vše je graficky znázorněno na obrázku 3.

□



Obrázek 3: Směrové pole z příkladu 3.1 sestrojené pomocí izoklin.



Obrázek 4: Směrové pole z příkladu 3.1 sestrojené pomocí počítače (sítě bodů).

Příklad 3.2 (Směrové pole)**.** *Znázorněte směrové pole diferenciální rovnice* $y' = t - \sqrt{y}$ *pomocí izoklin. Také se pokuste načrtnout graf některého řešení.*

Řešení. Pravá strana $f(t, y) = t - \sqrt{y}$ je definována pro $t \in \mathbb{R}$ a $y \geq 0$, tím je dáno

$$G = (-\infty,\infty) \times [0,\infty).$$

Izokliny:

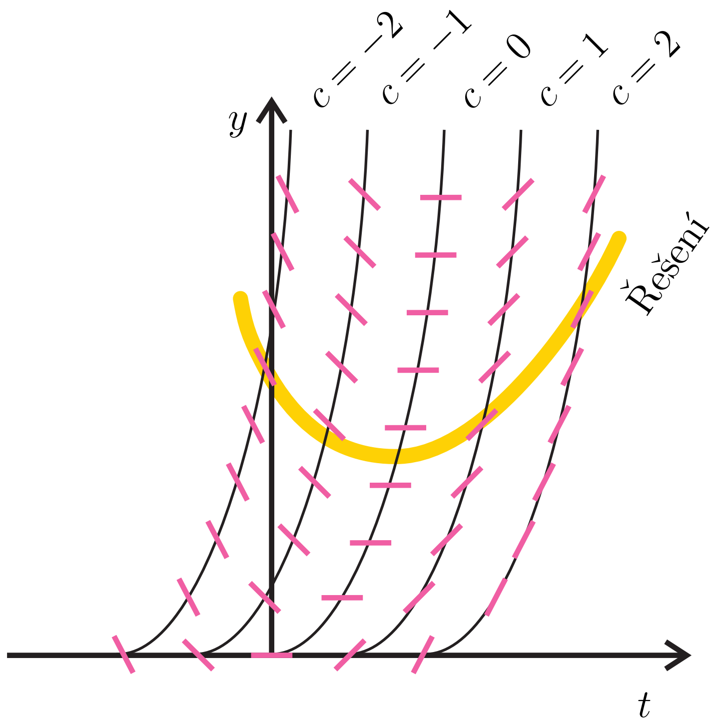
$$t - \sqrt{y} = c, \qquad \text{a tedy} \qquad \sqrt{y} = t - c.$$

Zde můžeme nahlédnout, že výraz dává smysl jen pro $t \geq c$, neboť levá strana ($\sqrt{y}$) je nutně nezáporná, což samozřejmě musíme požadovat i po pravé straně. Celkově tedy dostaneme:

$$y = (t - c)^2, \quad c \in \mathbb{R},\ t \geq c.$$

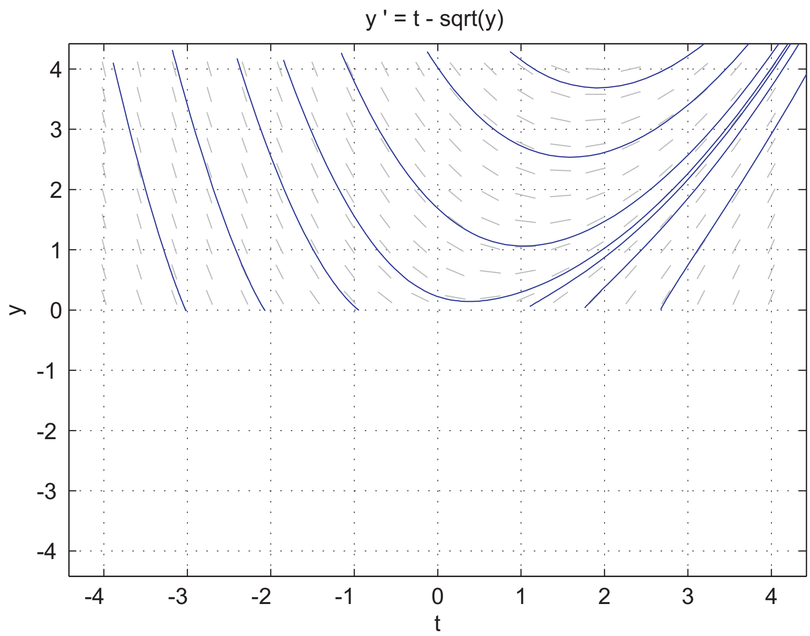
Pro zvolené c tedy půjde o pravou polovinu paraboly s vrcholem (počátkem) v bodě $(c, 0)$.

Vše (i s náčrtkem řešení) je znázorněno na obrázku 5.



Obrázek 5: Směrové pole z příkladu 3.2 sestrojené pomocí izoklin.

□



Obrázek 6: Směrové pole z příkladu 3.2 sestrojené pomocí počítače (sítě bodů).

Další příklady:

Příklad 3.3. *Znázorněte směrová pole následujících diferenciálních rovnic. Pokuste se načrtnout i graf nějakého řešení.*

a) $y' = y - t^2$,

b) $2y' + 2y - t - 3 = 0$,

c) $y' = \dfrac{y}{t-y}$,

d) $y' = t^2 + y^2$,

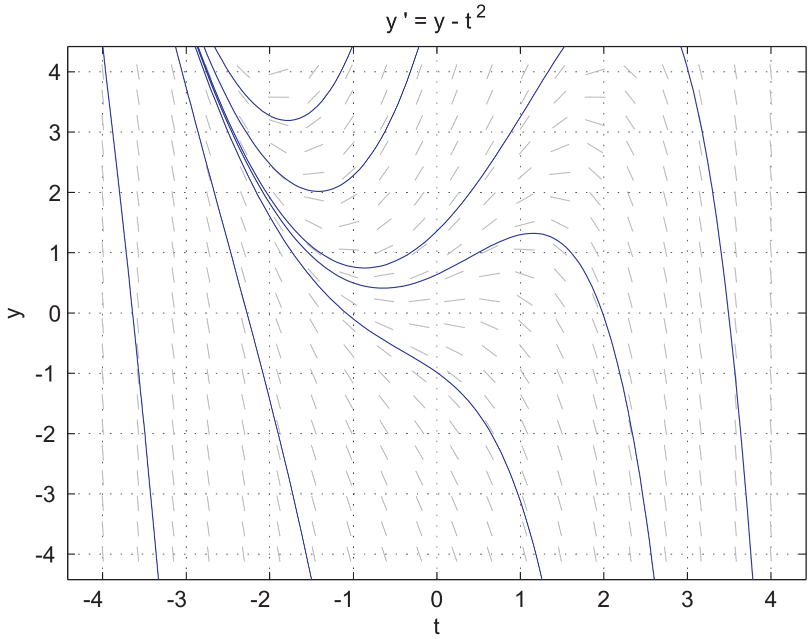
e) $y' = -\dfrac{t}{y}$.

Použitá a rozšiřující literatura

[1] J. Fišer: *Úvod do teorie obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic.* Skripta PřF UP, Olomouc, 2013.

[2] J. Diblík, M. Růžičková: *Obyčajné diferenciálne rovnice.* EDIS-vydavatelství ŽU, Žilina, 2008.

[3] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU Brno, PřF, 2001.



Obrázek 7: Směrové pole z příkladu 3.3a) sestrojené pomocí počítače (sítě bodů).

[4] J. Kopáček: *Matematická analýza nejen pro fyziky II.* Matfyzpress, Praha, 2007.

[5] P. Kreml a kol.: *Matematika II.* VŠB-TU Ostrava, [online], dostupné z: `http://www.studopory.vsb.cz/materialy.html`, [citováno 15. 10. 2012].

[6] J. Kuben: *Obyčejné diferenciální rovnice.* VA Brno, 2000.

[7] J. Nagy: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* MVŠT IX, SNTL, Praha, 1978.