

KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 8,

Obyčejné diferenciální rovnice 2

6. dubna 2016

***** Přednáška *****

1 Existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy

Stále uvažujeme rovnici

$$y' = f(t, y). \quad (1)$$

Budeme předpokládat, že k rovnici (1) existují integrální křivky (grafy řešení) na nějaké množině

$$G = I \times \Omega, \quad I, \Omega \subset \mathbb{R},$$

kde je funkce f definována.

Často nás ve výsledku nebudou zajímat všechna řešení dané úlohy, ale jen taková, která mají požadovanou vlastnost, splňují určitou podmínku.

Přitom je důležité, zda takové řešení vůbec existuje (existence řešení), a když ano, zda jich nemůže být víc ((ne)jednoznačnost řešení).

Takové podmínky mohou být formulovány různě, my se však zaměříme jen na jeden typ.

Cauchyova úloha

Budeme se věnovat tzv. *počáteční podmínce*

$$y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

která společně s diferenciální rovnicí (1) tvoří tzv. *Cauchyovu úlohu*, která je základní úlohou v teorii diferenciálních rovnic.

Definice 1.1 (Cauchyova úloha). *Mějme diferenciální rovnici (1) a počáteční podmínku (2).*

Jejich kombinaci, úlohu

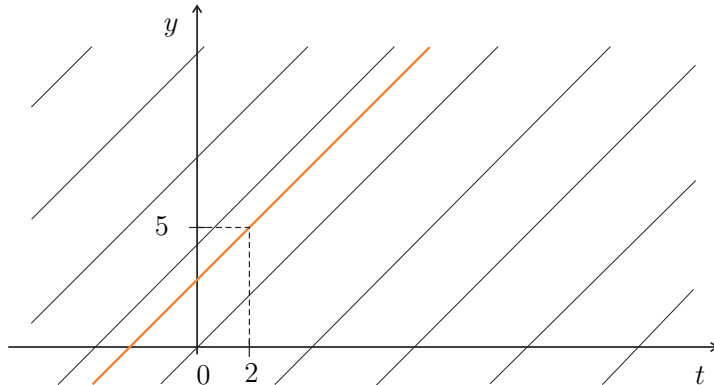
$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, (t_0, y_0) \in G, \end{cases} \quad (3)$$

nazýváme Cauchyova úloha.

Za její řešení bereme takové řešení $y = y(t)$ diferenciální rovnice $y' = f(t, y)$, které je definováno na nějakém intervalu J (kde $t_0 \in J$) a splňuje počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$.

Příklad Cauchyovy úlohy je v příkladu 2.3 na straně 12 skript [1]. Integrální křivky z tohoto příkladu představují soustavu navzájem rovnoběžných přímek $y = t + C$, $C \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení dané Cauchyovy úlohy (s počáteční podmínkou $y(2) = 5$) je pak reprezentováno tou přímkou soustavy, která prochází bodem $(2, 5)$.

Vše je znázorněno na obrázku 1.



Obrázek 1: Grafické znázornění řešení (přímky $y = t + C$, $C \in \mathbb{R}$) rovnice $y' = 1$. Zvýrazněno je řešení $y = t + 3$ splňující počáteční podmínku $y(2) = 5$.

Existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy

Postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy můžeme schematicky znázornit následovně:

$f(t, y)$ spojitá na $D \implies$ EXISTENCE

$$\left. \begin{array}{l} f(t, y) \text{ spojitá na } D \\ + \\ \frac{\partial f}{\partial y} \text{ omezená na } D \end{array} \right\} \implies \text{EXISTENCE A JEDNOZNAČNOST}$$

Obdélník D , který se ve schématu vyskytuje je definován ve skriptech [1] na straně 19, kde je o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy pojednáno podrobněji.

Zde si vystačíme s následující větou, ve které D nahradíme celou rovinou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Věta 1.2. *Nechť pravá strana rovnice (1) splňuje následující dvě podmínky:*

- je spojitá funkce na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vzhledem k oběma proměnným t a y ;
- má na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ spojitou a ohraničenou parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Potom Cauchyova úloha (3) má právě jedno řešení $y = y(t)$ definované na celém \mathbb{R} .

Příklad 1.3 ([2]). Ukážeme, že řešení rovnice

$$y' = t + \cos y$$

s počáteční podmínkou $y(t_0) = y_0$ je definované na celém intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Pravá strana je spojitá na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ v obou proměnných t a y a parciální derivace pravé strany vzhledem k y existuje a je ohraničená v celé rovině (t, y) , protože

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = |0 - \sin y| = |\sin y| \leq 1.$$

Tím jsou splněny předpoklady věty 1.2, a tak podle ní má úloha

$$\begin{cases} y' = t + \cos y, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

právě jedno řešení $y = y(t)$ definované pro $t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. □

Ukázku nejednoznačného řešení najdete v příkladu 3.5 skript [1] na straně 20.

2 Vybrané elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

Po prostudování této kapitoly již budete umět rozeznat a vyřešit separovatelnou obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu.

Konečně se vám dostane do ruky nástroj (postup) k aktivnímu vyřešení nějaké diferenciální rovnice.

Chceme-li úspěšně řešit diferenciální rovnice, je třeba:

- poznat, jakého typu je zadaná rovnice,
- znát algoritmus řešení tohoto typu rovnic,
- správně zvládnout potřebné výpočetní operace.

Pojďme si tedy představit první typ diferenciálních rovnic, který se naučíme řešit.

2.1 Separace proměnných

Tuto metodu lze užít u tzv. separovatelných rovnic. Ty lze převést na tzv. separovanou rovnici

$$\varphi(y) dy = \psi(t) dt, \quad (4)$$

ve kterém jsou proměnné t a y separovány (odděleny), každá na své straně rovnice.

Uvažujme dále rovnici

$$\Phi(y) = \Psi(t) + C, \quad (5)$$

kde $\Phi(y)$ je funkce primitivní k $\varphi(y)$, $\Psi(t)$ je primitivní k $\psi(t)$ a C je (integrační) konstanta. Jinými slovy, levou stranu rovnice (4) jsme integrovali podle y a pravou stranu podle t , přičemž jsme dvě integrační konstanty nahradili jedinou, umístěnou na pravé straně.

Dá se ukázat (naznačeno je to ve skriptech [1] na straně 22), že funkce $y = u(t)$ je řešením rovnice (4) právě tehdy, když vyhovuje rovnici (5); touto rovnicí lze tedy vyjádřit obecné řešení dané diferenciální rovnice (4).

Vraťme se nyní k naší rovnici $y' = f(t, y)$. Kdy ona bude separovatelná? Zřejmě tehdy, když její pravá strana půjde vyjádřit jako součin, $f(t, y) = g(t)h(y)$:

$$y' = g(t)h(y). \quad (6)$$

Za předpokladu $h(y) \neq 0$ a při vědomí $y' = \frac{dy}{dt}$ můžeme (6) převést na separovanou rovnici

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t) dt, \quad (7)$$

která se již řeší jako (4).

Zbývá vyšetřit podmínku $h(y) \neq 0$. Pokud má rovnice

$$h(y) = 0 \quad (8)$$

nějaké řešení $y = y_0 (\in \mathbb{R})$, potom je konstantní funkce $y \equiv y_0$ řešením (6), neboť po dosazení do (6) postupně dostáváme:

$$L = y' = (y_0)' = 0, \quad P = h(y)g(t) = h(y_0)g(t) = 0g(t) = 0, \quad \text{tedy } L = P.$$

Za obecné řešení (6) budeme brát obecné řešení (7) doplněné o konstantní řešení—kořeny (8).

V celé kapitole jsme se nezmínili o „definičním oboru“ G zkoumané rovnice. Budeme tak činit až u konkrétních příkladů.

Vše si prakticky ukážeme v následující úloze.

Příklad 2.1. Najdeme obecné řešení rovnice $y' = ty$.

Řešení. Vidíme, že pravá strana rovnice je definovaná v celé rovině ty , a tak můžeme psát $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Dále můžeme nahlédnout, že je separovatelná, neboť pravou stranu máme v požadovaném tvaru součinu $g(t) \cdot h(y) = t \cdot y$. Vyjádříme-li y' jako $\frac{dy}{dt}$, lze rovnici upravit na tvar, kde proměnné jsou již separované:

$$y' = ty,$$

$$\frac{dy}{dt} = ty \quad |: y \neq 0, \cdot dt,$$

$$\frac{dy}{y} = t dt.$$

Získaná rovnice je již separovaná. Získali jsme ji za předpokladu $y \neq 0$. Pokud ho zvlášť prověříme, zjistíme, že jsme tím „přišli“ o nulové řešení

$$y \equiv 0,$$

neboť

$$L = y' = (0)' = 0, \quad P = ty = t \cdot 0 = 0, \quad \text{a tedy } L = P \quad \text{pro všechna } t \in \mathbb{R}.$$

Nesmíme zapomenout jej nakonec přidat k ostatním řešením.

Nyní budeme pokračovat v řešení separované rovnice integrací obou stran.

$$\int \frac{dy}{y} = \int t dt, \quad (9)$$

$$\ln |y| = \frac{t^2}{2} + \ln C_1, \quad C_1 > 0, \quad (10)$$

$$|y| = C_1 e^{\frac{t^2}{2}}, \quad (11)$$

$$y = C_2 e^{\frac{t^2}{2}}, \quad C_2 \neq 0, \quad (12)$$

$$y = C e^{\frac{t^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Poznámky k řešení a zápisu:

- V řádku (10) máme zaznamenán výsledek integrace podle y vlevo a podle t vpravo, přičemž společnou integrační konstantu jsme zapsali ve tvaru přirozeného logaritmu libovolné kladné konstanty C_1 (takto můžeme vyjádřit libovolné reálné číslo). To se dělá v případě, kdy jsou v zápisu přítomny jiné přirozené logaritmy (jako zde vlevo) a čeká nás odlogaritmovávání. Jinak přechod mezi (9) a (10) je hlavním krokem řešení. Rovnice (10) již vyjadřuje vztah řešení y a nezávisle proměnné t . Naším cílem ovšem je, pokud je to možné, vyjádřit tuto závislost explicitně. To se nám zde podaří již na řádku (12).

- Řádek (11) je výsledkem zmíněného odlogaritmování:

$$L = e^{\ln|y|} = |y|, \quad P = e^{\frac{t^2}{2} + \ln C_1} = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot e^{\ln C_1} = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot C_1.$$

- V řádku (12) je již odstraněna absolutní hodnota. Jako z rovnice $|y| = 5$ vyplývá $y = \pm 5$, tak i zde máme $y = \pm C_1 e^{\frac{t^2}{2}}$, kde plus nebo minus libovolné kladné reálné číslo (C_1) představuje libovolné nenulové číslo (C_2).

- V posledním kroku jsme přidali nulové řešení, které zde šlo výhodně zahrnout tak, že jsme „povolili“ nulový koeficient (dříve $C_2 \neq 0$, nyní dohromady $C \in \mathbb{R}$). V konečném tvaru užíváme označení pro volitelnou konstantu C .

□

3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu (LDR_{1.ř})

Po prostudování této kapitoly budete schopni rozpoznat a vyřešit LDR_{1.ř} metodou variace konstanty.

Výhodou LDR_{1.ř} je jejich jednoduchý tvar a přímočaré řešení.

Lineární diferenciální rovnici prvního řádu nazýváme rovnicí tvaru

$$y' + p(t)y = f(t). \quad (14)$$

Funkce $f(t)$ se nazývá *pravá strana*. Pokud pravá strana není identicky rovna nule, máme *nehomogenní* LDR_{1.ř} (NHLDR_{1.ř}), v opačném případě máme rovnici *homogenní* (HLDR_{1.ř}):

$$y' + p(t)y = 0 \quad (15)$$

Budeme předpokládat, že p a f jsou spojité funkce na nějakém intervalu I . Jak je to potom s existencí řešení počáteční úlohy?

Věta 3.1 (O globálnosti řešení LDR_{1.ř}, [2]).

Jestliže jsou funkce p a f spojité na intervalu I , potom úloha

$$\begin{cases} y' + p(t)y = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

kde $t_0 \in I$ a y_0 je libovolné reálné číslo, má jediné řešení $y = y(t)$ na celém intervalu I .

LDR_{1.ř} jsou velmi důležité. Jednak na ně vede řada významných praktických problémů (chemické reakce, množení bakterií, radioaktivní rozpad, ochlazování těles, ...) a jednak lze některé jiné typy rovnic řešit tak, že je transformujeme na LDR_{1.ř}.

Existuje několik metod, jak řešit LDR_{1.ř}; lze je například řešit i vzorcem.¹ Nejznámější je *metoda variace konstanty*.

¹Prakticky se dává přednost použití některé z aktivních metod, sloužících jinak i k odvození onoho vzorce.

Metoda variace konstanty

Tato metoda spočívá ve třech krocích:

1. Nejprve řešíme (separací proměnných) příslušnou rovnici homogenní a obecné řešení zapíšeme s integrační konstantou K .
2. Řešení nehomogenní rovnice hledáme v tomtéž tvaru, kde však $K = K(t)$ je funkce (odsud i název metody: z konstanty „se stane“ funkce). Dosadíme tedy funkci vypočtenou v bodě 1 do dané nehomogenní rovnice a dostaneme rovnici pro neznámou funkci K' .
3. Integrací vypočteme $K(t)$ (s integrační konstantou C) a dosadíme je do funkce vypočtené v kroku 1.

Postup při řešení LDR_{1,r} metodou variance konstanty si ukážeme na příkladu.

Příklad 3.2. *Určíme obecné řešení diferenciální rovnice $y' = t + y$.*

Řešení: Danou rovnici lze přepsat do standardního tvaru $y' - y = t$, máme tedy $p(t) \equiv -1$ a $f(t) = t$. Podle návodu řešíme ve třech krocích:

1. Metodou separace proměnných vyřešíme příslušnou homogenní rovnici $y' - y = 0$. Její obecné řešení je

$$y = C \cdot e^t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že C nahradíme funkcí $K = K(t)$. Po dosazení máme

$$K' \cdot e^t + K \cdot e^t - K \cdot e^t = t;$$

dva členy s K se ruší (a to vždy!) a máme

$$K' = t \cdot e^{-t}.$$

3. Integrujeme:

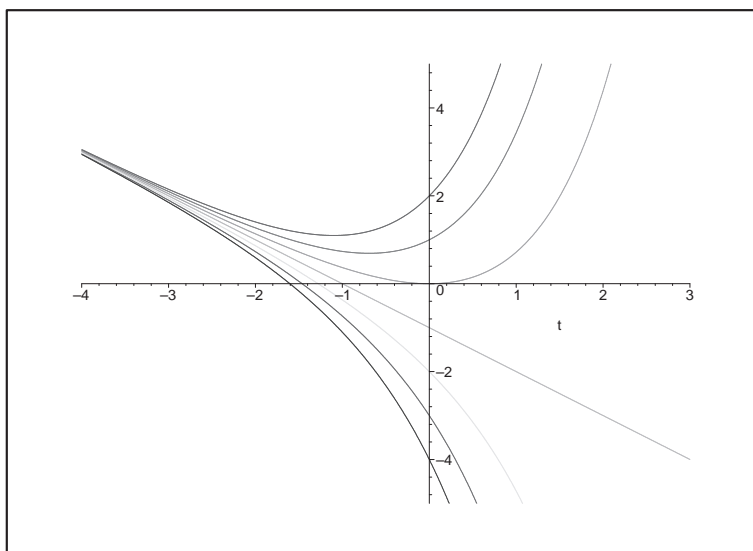
$$K = \int t e^{-t} dt = [\text{metoda per partes}] = C - t \cdot e^{-t} - e^{-t}.$$

Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot e^t$ a dostáváme

$$y = (C - t \cdot e^{-t} - e^{-t}) \cdot e^t.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$\left[y = C \cdot e^t - t - 1, \quad C \in \mathbb{R} \right].$$



Obrázek 2: Grafické znázornění několika řešení z příkladu 3.2.

□

Poznámka 3.3. Vidíme, že obecné řešení nehomogenní rovnice je rovno součtu obecného řešení příslušné rovnice homogenní ($C \cdot e^t$) a partikulárního řešení dané rovnice nehomogenní ($-t - 1$). Tento poznatek platí pro lineární rovnice obecně.

Příklad 3.4. Určíme obecné řešení diferenciální rovnice $y' - ty = t^3$ a najdeme řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 0$.

Použitá a rozšiřující literatura

- [1] J. Fišer: *Úvod do teorie obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic*. Skripta Pří UP, Olomouc, 2013.
- [2] J. Diblík, M. Růžičková: *Obyčejné diferenciální rovnice*. EDIS-vydavatelství ŽU, Žilina, 2008.
- [3] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice*. MU Brno, PřF, 2001.
- [4] J. Kopáček: *Matematická analýza nejen pro fyziky II*. Matfyzpress, Praha, 2007.

- [5] P. Kreml a kol.: *Matematika II*. VŠB-TU Ostrava, [online], dostupné z: <http://www.studopory.vsb.cz/materialy.html>, [citováno 15. 10. 2012].
- [6] J. Kuben: *Obyčejné diferenciální rovnice*. VA Brno, 2000.
- [7] J. Nagy: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. MVŠT IX, SNTL, Praha, 1978.

***** Cvičení *****

Příklad 3.5. Určíme obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y \cos t = \sin 2t$.

Řešení: Pravá strana je $\sin 2t$, příslušná rovnice homogenní je $y' + y \cos t = 0$.

1. Separací proměnných dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní $y = C \cdot e^{-\sin t}$, $C \in \mathbb{R}$.
2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že C nahradíme funkcí $K = K(t)$. Po dosazení máme

$$K' \cdot e^{-\sin t} + K \cdot e^{-\sin t}(-\cos t) + K \cdot e^{-\sin t} \cos t = \sin 2t;$$

dva členy s K se ruší (jako vždy) a máme $K' = e^{\sin t} \sin 2t$.

3. Integrujeme:

$$\begin{aligned} K &= \int e^{\sin t} \sin 2t \, dt = \int e^{\sin t} 2 \sin t \cos t \, dt = \left[\begin{array}{ll} u = 2 \sin t & v' = e^{\sin t} \cos t \\ u' = 2 \cos t & v = e^{\sin t} \end{array} \right] \\ &= 2 e^{\sin t} \sin t - \int 2 e^{\sin t} \cos t \, dt = 2 e^{\sin t} \sin t - 2 e^{\sin t} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot e^{-\sin t}$ a dostáváme

$$y = (2 e^{\sin t} \sin t - 2 e^{\sin t} + C) \cdot e^{-\sin t}.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$\left[y = 2(\sin t - 1) + C \cdot e^{-\sin t}, \quad C \in \mathbb{R} \right].$$

□

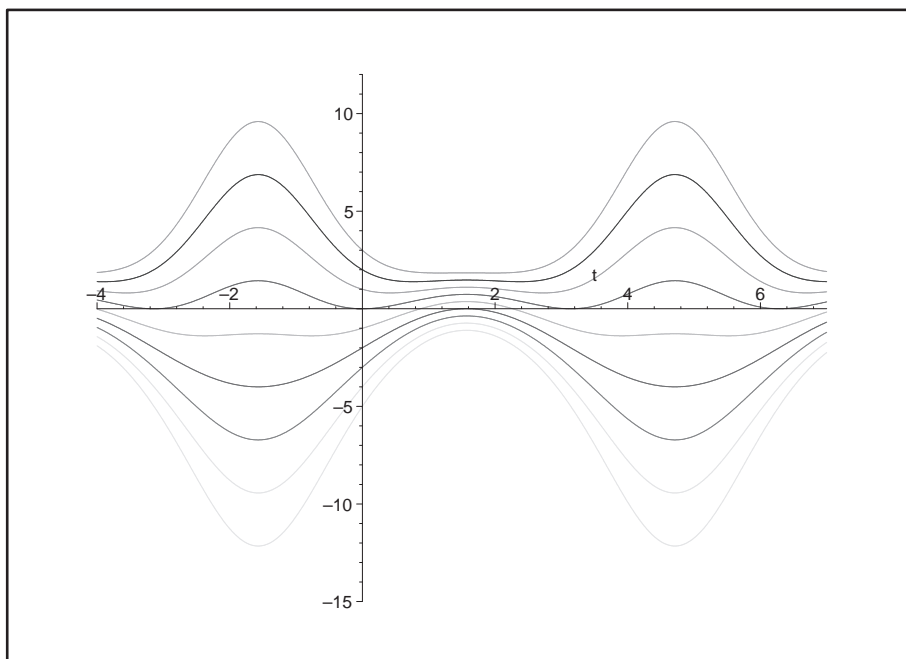
Další příklady:

Příklad 3.6. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' + 2ty = 2t e^{-t^2}. \quad \left[y = C e^{-t^2} + t^2 e^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R} \right]$$

Příklad 3.7. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' + 2y = t^2 + 2t. \quad \left[y = C e^{-2t} + \frac{1}{4}(2t^2 + 2t - 1), \quad C \in \mathbb{R} \right]$$



Obrázek 3: Grafické znázornění několika řešení z příkladu 3.5.

Příklad 3.8. Najdeme obecné řešení rovnice $y' = \frac{t(1-y)}{1+t}$.

Řešení. Ze zadání vyplývá, že řešení budeme hledat pro $t \neq -1$, neboť pro tuto hodnotu t není pravá strana definována.

Tato rovnice sice zatím není separovaná, ale je separovatelná, tj. lze v ní separovat proměnné. Vyjádříme-li y' jako $\frac{dy}{dt}$, lze rovnici upravit na tvar, kde proměnné jsou již separované:

$$\frac{dy}{1-y} = \frac{t dt}{1+t}, \quad (16)$$

přičemž použitá úprava vyžaduje předpoklad $y \neq 1$. Dále

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{t dt}{1+t}.$$

Po integraci máme

$$-\ln|1-y| = t - \ln|1+t| + C,$$

kde C je libovolná konstanta. V této chvíli je daná diferenciální rovnice již v podstatě vyřešena, všechno další jsou úpravy a kompletace řešení.

Předně, jsou-li v takto získané rovnici logaritmy, bývá vhodné i integrační konstantu vyjádřit jako logaritmus: $C = \ln C_1$, kde C_1 je libovolná *kladná* konstanta (zůstává zachováno, že C je *libovolná* konstanta). Rovnici

$$\ln |1 + t| - \ln |1 - y| = t + \ln C_1$$

odlogaritmuje a máme

$$\left| \frac{1 + t}{1 - y} \right| = C_1 e^t.$$

Položíme-li $C_2 = \frac{1}{C_1}$ ($C_2 > 0$ je pak také libovolná kladná konstanta), pak

$$\frac{1 - y}{1 + t} = \pm C_2 e^{-t}$$

a z toho

$$\frac{1 - y}{1 + t} = C_3 e^{-t},$$

kde $C_3 \neq 0$, tedy

$$\begin{aligned} 1 - y &= C_3 e^{-t}(1 + t), \\ y &= 1 - C_3 e^{-t}(1 + t), \end{aligned}$$

což je obecné řešení (16) v explicitním tvaru.

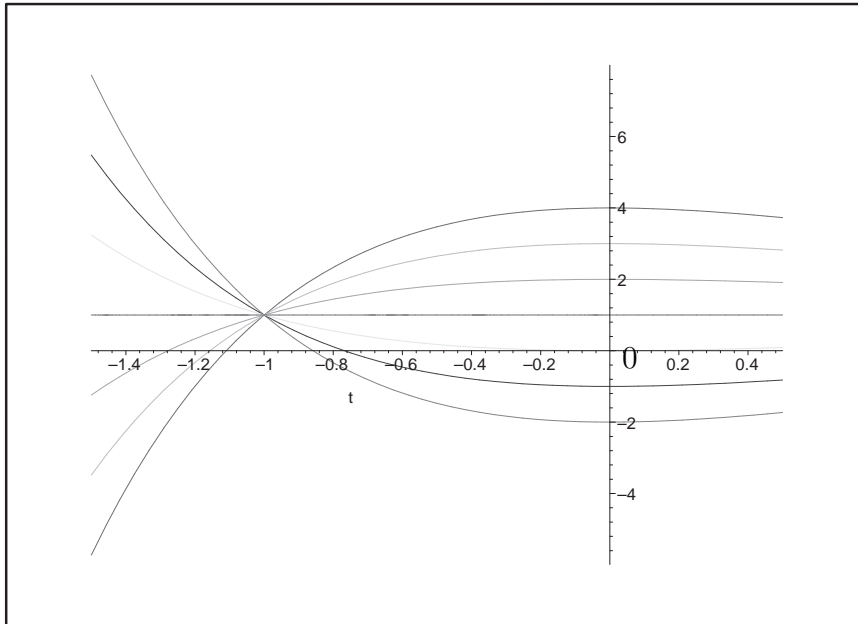
Nyní se vrátíme k podmínce ($y \neq 1$), kterou si vyžádala metoda řešení, a podíváme se, zda jsme tím nezanedbali nějaké řešení. Tedy ověříme, zda $y \equiv 1$, je řešením, tím, že tuto funkci dosadíme do levé a pravé strany dané diferenciální rovnice:

$$L = y' = 0, \quad P = \frac{t(1 - y)}{1 + t} = 0.$$

Jelikož $L = P$ pro $t \neq -1$, funkce $y \equiv 1$, $t \neq -1$, je skutečně řešením. Toto řešení však nemusíme uvádět zvlášť, protože je dostaneme, když ve výše uvedeném obecném řešení připustíme nulovou hodnotu C . Konečný tvar obecného řešení je tedy

$$\left[y = 1 + C e^{-t}(1 + t), \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \neq -1 \right].$$

Situace je znázorněna na obrázku 4. Všimněte si zajímavého chování řešení v blízkosti bodu $(-1, 1)$. \square



Obrázek 4: Grafické znázornění několika řešení úlohy 3.8.

Příklad 3.9. Najdeme (obecné) řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{1 - 2t}{y^2}$.

Řešení. Ze zadání této separovatelné diferenciální rovnice plyne, že neznámá funkce y se nikdy nesmí rovnat nule,

$$y \neq 0,$$

neboť se vyskytuje ve jmenovateli. Tato skutečnost nám umožňuje vynásobit celou rovnici y^2 a po přepsání derivace na podíl diferenciálů dostáváme (zde bez dodatečných podmínek):

$$y^2 y' = 1 - 2t.$$

Pokračujeme v úpravách a výpočtech:

$$y^2 dy = (1 - 2t) dt,$$

$$\int y^2 dy = \int (1 - 2t) dt,$$

$$\frac{1}{3} y^3 = t - t^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

$$y^3 = 3t - 3t^2 + C_2, \quad C_2 = 3C_1 \Rightarrow C_2 \in \mathbb{R},$$

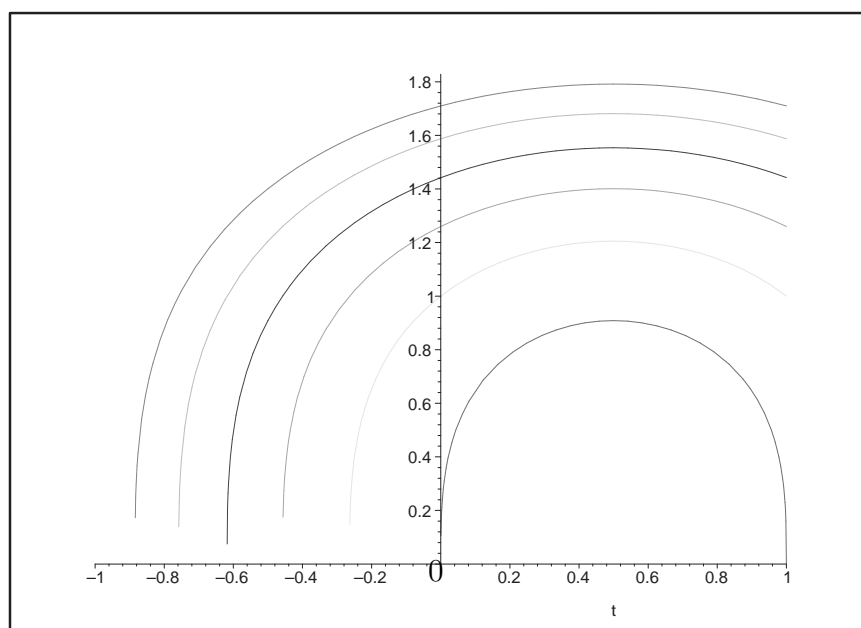
$$y = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C_2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení dané rovnice je

$$\left[y = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0 \right].$$

Na obrázku 5 je poněkud nedokonale znázorněno několik kladných řešení.

□



Obrázek 5: Grafické znázornění několika řešení úlohy 3.9.

Další příklady:

Příklad 3.10. Pomocí separace proměnných vyřešte následující diferenciální rovnice:

1. $y' = \frac{y}{t}, \quad [y = Ct, \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0],$

2. $y' = \frac{t}{y}, \quad [y = \pm\sqrt{t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0, \quad t \geq -C],$

3. $y' = -\frac{y}{t}, \quad [y = \frac{C}{t}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0],$

$$4. y' = -\frac{t}{y}, \quad [y^2 + t^2 = C, C \geq 0, y \neq 0],$$

$$5. y' = \frac{y-1}{t^2 y^2}, \quad \left[\begin{array}{l} \frac{y^2}{2} + y + \ln(y-1) = -\frac{1}{t} + C, C \in \mathbb{R}, t \neq 0, y \neq 0, \\ y \equiv 1 \end{array} \right].$$