KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 9,

Interpolace a aproximace dat 1

10. a 18. duben 2017

1 Interpolační polynom

Často je potřeba složitou funkci nahradit funkcí jednodušší, nebo naopak k daným bodům určit jednoduchou funkci, jejíž graf těmito body prochází.

V obou případech vycházíme ze zadaných uzlů $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a funkčních hodnot v těchto uzlech $f_0, f_1, \ldots, f_n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Zpravidla tedy dostaneme k dispozici tabulku následujícího tvaru:

i	0	1	2	$\cdots$	n
x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
f_i	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

,

konkrétně například

i	0	1	2
x_i	-3	-1	1
f_i	1	-1	2

Interpolační úloha

je o tom, že hledáme polynom stupně nejvýše n,

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n, \tag{1}$$

jehož graf zadanými body prochází, tudíž platí, že funkční hodnoty polynomu p_n se v uzlech rovnají zadaným funkčním hodnotám:

$$p_n(x_0) = f_0, \quad p_n(x_1) = f_1, \quad p_n(x_2) = f_2, \quad \cdots \quad p_n(x_n) = f_n. \tag{2}$$

Interpolovat lze i pomocí dalších funkcí, ale využití polynomů se ukazuje nejjednodušší. Polynomy se dále dobře derivují a integrují. Proto se zaměříme jen na ně.

Z (2) dostaneme po dosazení za p_n z (1) soustavu $n+1$ lineárních rovnic pro $n+1$ neznámých koeficientů $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n & = & f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n & = & f_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n & = & f_2 \\ & \vdots & \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n & = & f_n \\ \hline \end{array} . \tag{3}$$

Rozšířená matice této soustavy má tvar

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & f_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & f_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n & f_n \end{array} \right).$$

Dá se ukázat, že matice soustavy má plnou hodnost, a tak existuje jediné řešení $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, tedy jediný polynom $p_n(x)$ (stupně nejvýše n), který danou soustavu rovnic splňuje. Koeficienty $a_0, \dots, a_n$ mohou být i nulové, a tak výsledný polynom skutečně nemusí být přímo stupně n, ale i nižšího. Proto hovoříme o polynomu stupně nejvýše n a ne o polynomu stupně n. Na druhou stranu nemůže být vyššího stupně, neboť mocniny vyšší než n v něm nepředpokládáme.

Zmíněné podstatné informace si shrneme do následující věty:

Věta 1.1. *Nechť jsou dány vzájemně různé uzly x_i a funkční hodnoty f_i v těchto uzlech, $i = 0, 1, \dots, n$. Potom existuje právě jeden interpolační polynom stupně nejvýše n. Jeho koeficienty získáme jako řešení soustavy (3).*

Příklad 1.2. *Pro uzly x_i a funkční hodnoty f_i dané tabulkou*

i	0	1	2
x_i	-3	-1	1
f_i	1	-1	2

sestavte interpolační polynom.

Řešení. Podle věty 1.1 existuje právě jeden polynom stupně nejvýše 2,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

který interpoluje daná data. Jeho koeficienty získáme jako jediné řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} p(-3) & = & 1 & \Longrightarrow & a_0 - 3a_1 + 9a_2 & = & 1, \\ p(-1) & = & -1 & \Longrightarrow & a_0 - a_1 + a_2 & = & -1, \\ p(1) & = & 2 & \Longrightarrow & a_0 + a_1 + a_2 & = & 2. \\ \hline \end{array}$$

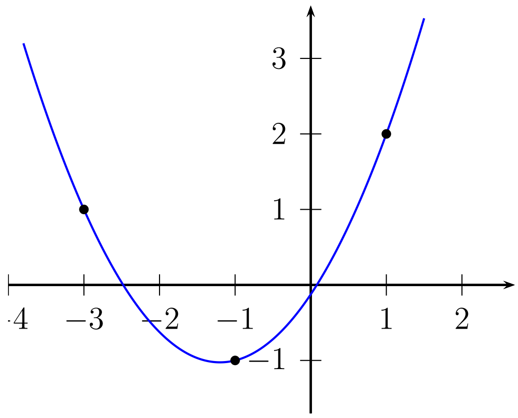
V maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Po vyřešení dostáváme $a_0 = -\frac{1}{8}$, $a_1 = \frac{3}{2}$ a $a_2 = \frac{5}{8}$. Hledaný interpolační polynom má tvar

$$p(x) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}x^2.$$

□



Obrázek 1: Ilustrace k úloze 1.2.

1.1 Lagrangeův tvar interpolačního polynomu

Interpolační polynom stupně nejvýše n sice existuje právě jeden, ale můžeme jej získat či zapsat v různých tvarech, z různých důvodů. Jako ukázku si předvedeme tzv. Lagrangeův tvar, při jehož hledání se obejdeme bez řešení soustavy lineárních rovnic.

Jak na to? Interpolační polynom budeme hledat ve tvaru

$$p_n(x) = f_0\varphi_0(x) + f_1\varphi_1(x) + \cdots + f_n\varphi_n(x). \tag{4}$$

Požadované rovnosti $p_n(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ budou splněny pro

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad i = j, \\ 0 & \text{pro} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Tomu vyhovují následující funkce:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdots(x_0-x_{n-1})(x_0-x_n)}, \\
\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)}, \\
\varphi_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{n-1})(x_2-x_n)}, \\
&\vdots \\
\varphi_{n-1}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)}, \\
\varphi_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})},
\end{aligned}$$

Příklad 1.3. *Pro uzly x_i a funkční hodnoty f_i dané tabulkou*

i	0	1	2
x_i	-3	-1	1
f_i	1	-1	2

sestavte interpolační polynom v Lagrangeově tvaru.

Řešení. Interpolační polynom v Lagrangeově tvaru je dán předpisem

$$p_2(x) = f_0\varphi_0(x) + f_1\varphi_1(x) + f_2\varphi_2(x),$$

kde $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ jsou polynomy Lagrangeovy báze dané úlohy:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \frac{(x+1)(x-1)}{(-3+1)(-3-1)} = \frac{1}{8}(x+1)(x-1), \\
\varphi_1 &= \frac{(x+3)(x-1)}{(-1+3)(-1-1)} = -\frac{1}{4}(x+3)(x-1), \\
\varphi_2 &= \frac{(x+3)(x+1)}{(1+3)(1+1)} = \frac{1}{8}(x+3)(x+1).
\end{aligned}$$

Celkově tedy

$$p_2(x) = \frac{1}{8}(x+1)(x-1) + \frac{1}{4}(x+3)(x-1) + \frac{1}{4}(x+3)(x+1).$$

$\square$

Úloha 1.4. *Pro uzly x_i a funkční hodnoty f_i dané tabulkou*

i	0	1	2
x_i	1	2	3
f_i	2	1	3

sestavte interpolační polynom: a) v základním tvaru, b) v Lagrangeově tvaru.
$\left[p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 6\right]$

Úloha 1.5. *Pro uzly x_i a funkční hodnoty f_i dané tabulkou*

i	0	1	2	3
x_i	-4	-2	-1	0
f_i	0	0	1	0

sestavte interpolační polynom: a) v základním tvaru, b) v Lagrangeově tvaru.
$\left[p_3(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{8}{3}x\right]$