KMA/MAT2 Přednáška a cvičení č. 10,

Interpolace a aproximace dat 2

24. a 25. duben 2017

1 Aproximace metodou nejmenších čtverců

Hledáme funkci φ, pro niž je

$$\varphi(x_i) \approx f_i,\ i = 0, 1, \ldots, n,$$

kde přibližná rovnost „$\approx$“ je určena tak, aby součet druhých mocnin (čtverců) odchylek mezi předepsanými hodnotami f_i a hodnotami $\varphi(x_i)$ byl minimální.

Nechť je předepsán systém daných funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$. Uvažujeme všechny funkce φ v následujícím tvaru:

$$\varphi(x) := c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j(x),$$

kde koeficienty $c_1, \ldots, c_m$ jsou libovolná reálná čísla. Například $\varphi(x) := c_1 + c_2 x$ nebo $\varphi(x) := c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$.

Funkci φ^*, která má minimální součet druhých mocnin (čtverců) odchylek mezi předepsanými hodnotami f_i a hodnotami $\varphi(x_i)$, tedy

$$\sum_{i=0}^{n}(\varphi^*(x_i) - f_i)^2 \le \sum_{i=0}^{n}(\varphi(x_i) - f_i)^2, \quad \text{pro všechna } \varphi,$$

nazýváme *aproximací podle metody nejmenších čtverců*. Její koeficienty $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_m^*$ určíme jako minimum funkce

$$\Psi(c_1, \ldots, c_m) := \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j(x_i) - f_i\right)^2,$$

které vyhovuje rovnicím

$$\frac{\partial\Psi}{\partial c_k}(c_1^*, \ldots, c_m^*) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Po dosazení parciálních derivací

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c_k} = 2\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j(x_i) - f_i\right)\varphi_k(x_i)$$

do (1) dostaneme soustavu m lineármích rovnic o m neznámých $c_1^*, \ldots, c_m^*$:

$$2\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j^*\varphi_j(x_i) - f_i\right)\varphi_k(x_i) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Po jednoduché úpravě:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\right)c_j^* = \sum_{i=0}^{n} f_i\varphi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Soustava (2) se nazývá *soustava normálních rovnic.*

Příklad 1.1. *Napište normální soustavu lineárních rovnic odpovídající systému funkcí*

$$\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad \varphi_2(x) = \sin x.$$

Aproximujte data

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
f_i	10	4	6	3

.

Řešení. Funkce φ_j jsou dvě, tedy $m = 2$. Uzly x_i jsou čtyři, tedy $n = 3$.

Soustava normálních rovnic:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=0}^{3}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)\right)c_j^* = \sum_{i=0}^{3} f_i\varphi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, 2.$$

Rozepíšeme pro $k = 1$ a $k = 2$

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=0}^{3}\varphi_j(x_i)\varphi_1(x_i)\right)c_j^* = \sum_{i=0}^{3} f_i\varphi_1(x_i),$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=0}^{3}\varphi_j(x_i)\varphi_2(x_i)\right)c_j^* = \sum_{i=0}^{3} f_i\varphi_2(x_i).$$

Na levých stranách rozepíšeme pro $j = 1$ a $j = 2$. Tím bude zřejmější, že jde soustavu dvou rovnic o dvou neznámých c_1^* a c_2^*:

$$\left(\sum_{i=0}^{3}\varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i)\right)c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3}\varphi_2(x_i)\varphi_1(x_i)\right)c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i\varphi_1(x_i),$$

$$\underline{\left(\sum_{i=0}^{3} \varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i)\right) c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3} \varphi_2(x_i)\varphi_2(x_i)\right) c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i\varphi_2(x_i).}$$

Ještě dosadíme ze zadání $\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ a $\varphi_2(x) = \sin x$:

$$\left(\sum_{i=0}^{3} \mathrm{e}^{-x_i}\,\mathrm{e}^{-x_i}\right) c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3} (\sin x_i)\,\mathrm{e}^{-x_i}\right) c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i\,\mathrm{e}^{-x_i},$$

$$\underline{\left(\sum_{i=0}^{3} \mathrm{e}^{-x_i}(\sin x_i)\right) c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3} (\sin x_i)(\sin x_i)\right) c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i(\sin x_i).}$$

Po drobné úpravě (druhé mocniny) dostáváme normální soustavu s oddělenými jednotlivými koeficienty:

$$\left(\sum_{i=0}^{3} \left(\mathrm{e}^{-x_i}\right)^2\right) c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3} (\sin x_i)\,\mathrm{e}^{-x_i}\right) c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i\,\mathrm{e}^{-x_i},$$

$$\underline{\left(\sum_{i=0}^{3} \mathrm{e}^{-x_i}(\sin x_i)\right) c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3} (\sin x_i)^2\right) c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i(\sin x_i).}$$

Tím je úloha splněna.

Pro případné další řešení této normální soustavy je potřeba vypočíst jednotlivé koeficienty, tedy:

$$\sum_{i=0}^{3} \left(\mathrm{e}^{-x_i}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{-x_0}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-x_1}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-x_2}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-x_3}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{2}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{1}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-2}\right)^2 \doteq 62{,}14.$$

Podobně další tři koeficienty na levé straně:

$$\sum_{i=0}^{3} (\sin x_i)\,\mathrm{e}^{-x_i} = \sum_{i=0}^{3} \mathrm{e}^{-x_i}(\sin x_i) \doteq 8{,}57, \qquad \sum_{i=0}^{3} (\sin x_i)^2 \doteq 3{,}07.$$

Zbývají dvě pravé strany:

$$\sum_{i=0}^{3} f_i\,\mathrm{e}^{-x_i} \doteq 87{,}38, \qquad \sum_{i=0}^{3} f_i(\sin x_i) \doteq -4{,}68.$$

Po dosazení již dostaneme soustavu

$$62{,}14 c_1^* + 8{,}57 c_2^* = 87{,}38,$$

$$\underline{8{,}57 c_1^* + 3{,}07 c_2^* = -4{,}68.}$$

Po jejím vyřešení dostáváme aproximační funkci

$$\varphi(x) = c_1^*\,\mathrm{e}^{-x} + c_2^* \sin x \approx 1{,}95\,\mathrm{e}^{-x} + 3{,}91 \sin x.$$

□