Matematika 2

Geometrická interpretace určitého integrálu.

Jiří Fišer

KMA, PřF UP Olomouc

ZS09

Vzorce pro obsah a délku

	Obsah	Délka křivky
Explicitně	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$
Parametricky	$\left\lvert\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{d}x\right\rvert = \left\lvert\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right\rvert$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

Plocha rovinných obrazců

Úloha

Grafy funkcí f a g vymezily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočtěte obsah této plochy, jestliže:

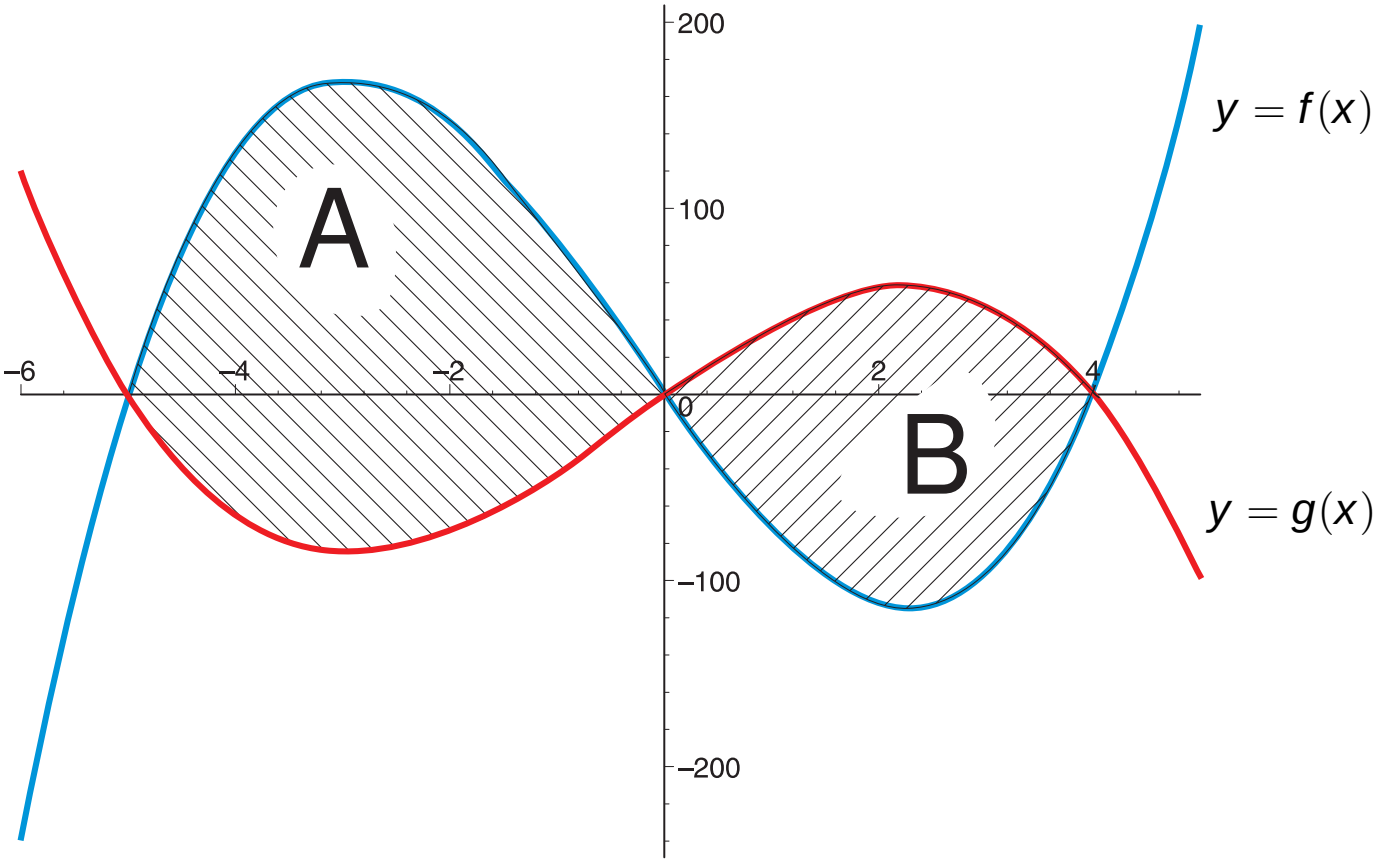
$$f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 80x, \quad g(x) = -2x^3 - 2x^2 + 40x.$$

Plocha rovinných obrazců

Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

Průsečíky: $f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4.$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:



Plocha rovinných obrazců

Ze znalosti vzájemné velikosti $f(x)$ a $g(x)$ na intervalech $\langle -5, 0\rangle$ a $\langle 0, 4\rangle$ dostaneme plochy oblastí A a B:

$$P = P_A + P_B = \int_{-5}^{0} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} \Big(g(x) - f(x)\Big)\,\mathrm{d}x,$$

pokud bychom neznali jejich uspořádání, stačí vzít:

$$P = P_A + P_B = \left|\int_{-5}^{0} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{4} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right|,$$

nebo dokonce

$$P = \int_{-5}^{4} \Big|f(x) - g(x)\Big|\,\mathrm{d}x.$$

Pro konečný výpočet použijeme prostřední vztah.

Plocha rovinných obrazců

$$\int \Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int \Big(\big(4x^3+4x^2-80x\big)-\big(-2x^3-2x^2+40x\big)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \Big(6x^3+6x^2-120x\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^4+2x^3-60x^2+C.$$

$$\begin{aligned} P &= \left|\int_{-5}^{0}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{4}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left[\frac{3}{2}x^4+2x^3-60x^2\right]_{-5}^{0}\right| + \left|\left[\frac{3}{2}x^4+2x^3-60x^2\right]_{0}^{4}\right| \\ &= \left|\frac{1625}{2}\right| + |-448| = \frac{2521}{2}. \end{aligned}$$

Plocha rovinných obrazců

Úloha

Grafy funkcí f a g vymezily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočtěte obsah této plochy, jestliže:

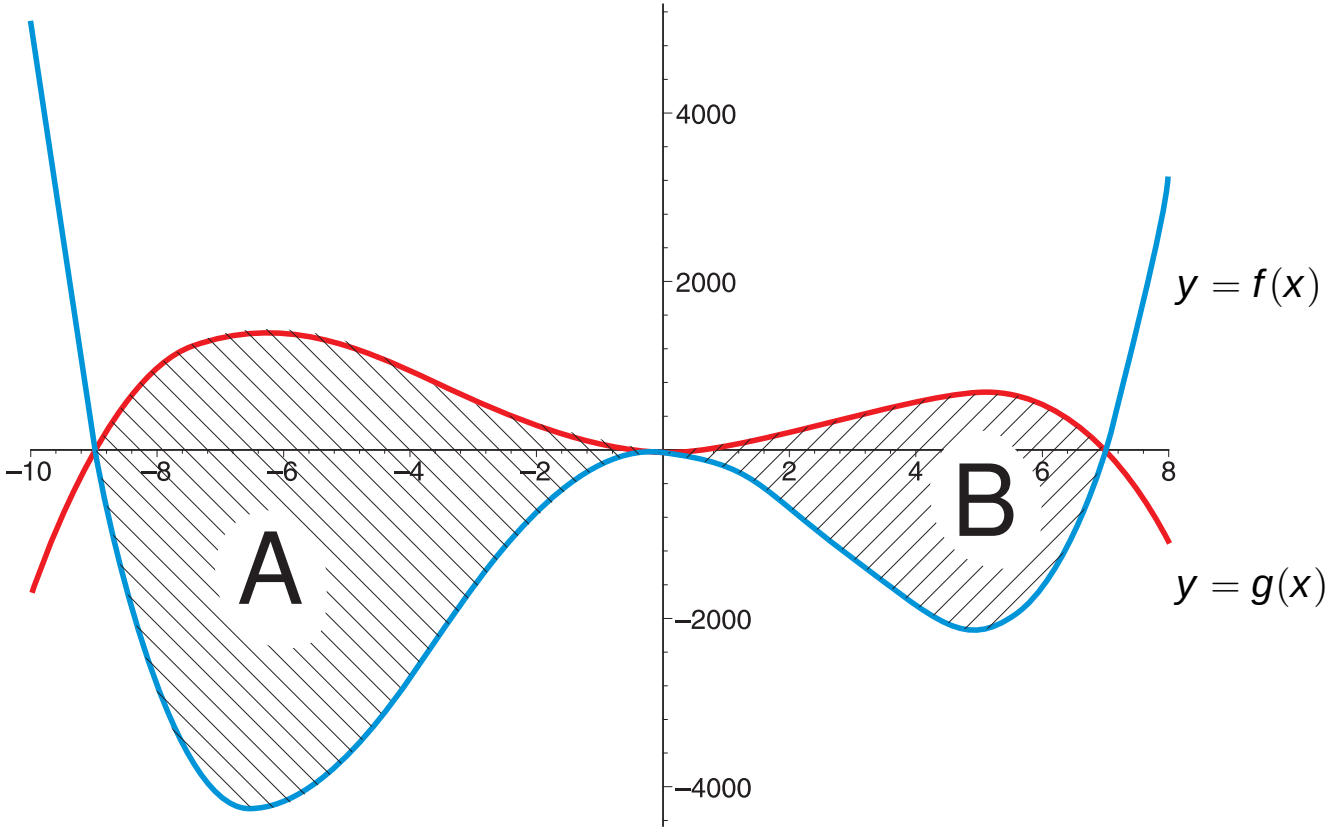
$$f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 189x^2, \quad g(x) = -x^4 - 2x^3 + 63x^2.$$

Plocha rovinných obrazců

Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

Průsečíky: $f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -9,\ x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 7.$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:



Plocha rovinných obrazců

Nebudeme hledat uspořádání funkcí na intervalech $\langle -9, 0\rangle$ a $\langle 0, 7\rangle$, a přímo vezmeme:

$$P = P_A + P_B = \left|\int_{-9}^{0} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{7} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right|.$$

$$\int \Big(f(x) - g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int \Big(\big(3x^4 + 6x^3 - 189x^2\big) - \big(-x^4 - 2x^3 + 63x^2\big)\Big)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \Big(4x^4 + 8x^3 - 252x^2\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}x^5 + 2x^4 - 84x^2 + C.$$

Plocha rovinných obrazců

$$
\begin{aligned}
P &= \left|\int_{-9}^{0}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{7}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\left[\frac{3}{2}\frac{4}{5}x^5 + 2x^4 - 84x^2\right]_{-5}^{0}\right| + \left|\left[\frac{4}{5}x^5 + 2x^4 - 84x^2\right]_{0}^{4}\right| \\
&= \left|-\frac{135594}{5}\right| + \left|-\frac{52822}{5}\right| = \frac{188416}{5}.
\end{aligned}
$$

Délka oblouku (křivky)

$$s = \int_a^b \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Úloha

Určete délku úsečky ležící na přímce $\boxed{y = 2x, \text{ pro } x \in \langle 0; 3 \rangle.}$

Řešení.

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \sqrt{1 + 2^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \sqrt{1 + 4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\sqrt{5}x\right]_{x=0}^{3} = 3 \cdot \sqrt{5}\ [j].$$

□

Délka oblouku (křivky)

Úloha

Určete délku oblouku asteroidy

$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t, \end{aligned} \qquad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

$$\begin{aligned}
x' &= -3a\cos^2 t \sin t, \\
x' &= -3a\cos^2 t \sin t, \\
x'^2 + y'^2 &= 9a^2\left(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t\right) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t \left(\sin^2 t + \right. \\
&= 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t. \\
s &= \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t \, \mathrm{d}t = 3a \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a.
\end{aligned}$$

Délka oblouku (křivky)

(*Funkce* $\sin t$ *i* $\cos t$ *jsou na intervalu* $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ *nezáporné, takže po odmocnění není třeba psát absolutní hodnotu.*)

$$\boxed{\text{Délka oblouku asteroidy je} \quad s = \frac{3}{2}a.}$$

(*Celková délka asteroidy je tedy* $4s = 6a$.)

Objem tělesa

Pomocí Riemannova integrálu funkce jedné proměnné lze počítat objemy ve dvou případech.

a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$, $x = b$ a známe funkci $P(x)$, jejíž hodnoty znamenají obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose x. Element objemu je

$$\Delta V = P(x) \cdot \Delta x, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}V = P(x) \cdot \mathrm{d}x,$$

a objem tělesa je

$$V = \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Rotační těleso, kde osou rotace je osa x a které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Zde je řezem kruh o obsahu $\pi[f(x)]^2$ a platí

$$V = \pi \int_a^b \Big[f(x)\Big]^2 \mathrm{d}x = \pi \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x.$$

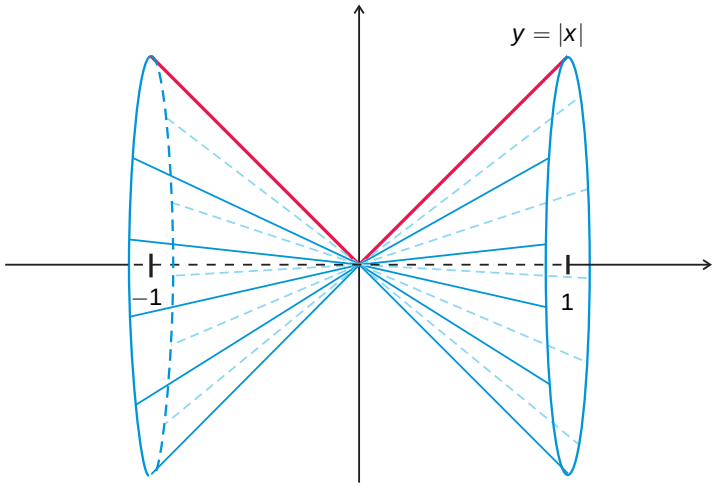
Objem tělesa

Úloha

Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = |x|$ kolem osy x na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Vyjdeme ze vzorce pro objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x:

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} |x|^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} [j^3].$$



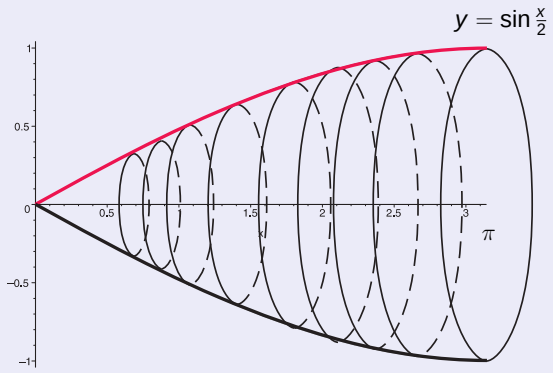
Objem tělesa

Úloha

Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = \sin\frac{x}{2}$ *kolem osy* x *na intervalu* $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení.

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[x - \sin x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi^2 \ [j^3].$$



□