Písemka LS-2013 **P1–A**

25. března 2013

KMA-MAT2/MT2

VZOR 1/3

1. Pro funkci $f : y = \sqrt{(1-4x^2)}$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.
2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.
   (a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{x^3}\,\mathrm{d}x$,
   (b) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$,
   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$.
3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $g : y = -2x^2 + x + 10$ a $f : y = 3x + 6$.

(1) $D(f)$: $1-4x^2 \geq 0$, $4x^2 \leq 1$, $x^2 \leq \frac{1}{4}$, $|x| \leq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$D(f) = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$

f': $y = \dfrac{1}{2\sqrt{1-4x^2}} \cdot (-4 \cdot 2 \cdot x) = \dfrac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$D(f') = D(f) \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(2a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{x^3}\,dx = \int \left(\frac{x^3}{x^3} - 2\cdot\frac{x}{x^3} + 5\frac{1}{x^3}\right)dx = \int (1 - 2x^{-2} + 5x^{-3})\,dx =$

$= x - 2\dfrac{x^{-1}}{-1} + 5\dfrac{x^{-2}}{-2} + C = x + 2\cdot\dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2} + C = x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{2x^2} + C$

$x \neq 0 \Rightarrow (-\infty, 0)$ nebo $(0, +\infty)$

(2b) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & v' = \sin x \\ u' = 2x & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx =$

$= \begin{bmatrix} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\left(x \cdot \sin x - \int \sin x\,dx\right) =$

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$ $\quad x \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$

Písemka LS-2013 **P1–A**

25. března 2013

KMA-MAT2/MT2

VZOR 2/3

1. Pro funkci $f : y = \sqrt{(1-4x^2)}$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{x^3}\,dx$,

   (b) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$,

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $g : y = -2x^2 + x + 10$ a $f : y = 3x + 6$.

2c

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{array}\right] = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \operatorname{arctg}(\ln x) + C \quad , \quad x \in (0; +\infty)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \Big[\operatorname{arctg}(\ln x)\Big]_0^1 =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctg}(\ln x) - \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}(\ln x) =$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Písemka LS-2013 **P1–A**

25. března 2013

KMA-MAT2/MT2

VZOR 3/3

1. Pro funkci $f : y = \sqrt{(1 - 4x^2)}$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^3}\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$,

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1 + \ln^2 x)}$.

3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $g : y = -2x^2 + x + 10$ a $f : y = 3x + 6$.

③ Průsečíky:

$$g(x) = f(x), \quad -2x^2 + x + 10 = 3x + 6$$
$$-2x^2 - 2x + 4 = 0$$
$$-2(\underbrace{x^2 + x - 2}) = 0$$
$$D = 1 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9 = 3^2$$
$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$x_1 = -2,\ x_2 = 1$

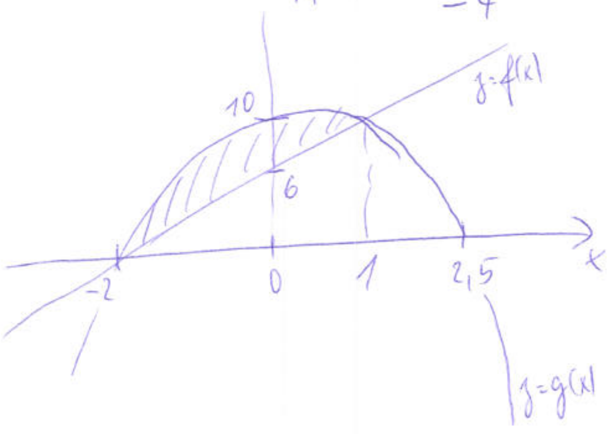
Grafické znázornění

$g(x) = -2x^2 + x + 10$

$\Rightarrow$ konkávní $\cap$

nulové body $g(x) = 0$: $D = 1 - 4\cdot(-2)\cdot 10 = 81 = 9^2$

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm 9}{-4} = \begin{cases} 2{,}5 \\ -2 \end{cases}$$



$$P = \int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))\,dx =$$
$$= \int_{-2}^{1} (-2x^2 + x + 10 - (3x + 6))\,dx =$$
$$= \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4)\,dx = -2\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)\,dx =$$
$$= -2\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{1} = -2\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(\frac{-8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right)\right] = -2\left(\frac{9}{3} - \frac{3}{2} - 6\right) =$$
$$= -2\left(-3 - \frac{3}{2}\right) = 6 + 3 = 9\ [j^2]$$

$x \in \mathbb{R}$