Písemka LS-2013 **P1–$\mathbb{D}$**

10. dubna 2013

KMA-MAT2/MT2 ....

1. Pro funkci $\quad f : y = \dfrac{\sin(2x^2+3x)}{\ln(x^2-1)} - 25^{13} \quad$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (3\,|2x+1| + 5)\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$,

   (c) $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^3}{x}\,\mathrm{d}x$.

3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $\quad y = -x^2 + 4x - 2 \quad$ a $\quad x + y = 2$.

(1) $D(f)$: čitatel a sinus „berou vše" $x \in \mathbb{R}$
jmenovatel $\neq 0 \to \ln(x^2-1) \neq 0 \to x^2-1 \neq 1,\ x^2 \neq 2,\ x \neq \pm\sqrt{2}$
Logaritmus: $x^2-1>0,\ x^2>1,\ x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
Dohromady: $D(f) = (-\infty,+\infty) \cap (\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{2}\}) \cap [(-\infty,-1)\cup(1+\infty)] =$
$= (-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},-1)\cup(1,+\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

$$y' = \frac{[\cos(2x^2+3x)]\cdot(4x+3)\cdot\ln(x^2-1) - \sin(2x^2+3x)\cdot\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x}{[\ln(x^2-1)]^2} - 0$$

$D(f')$: především víme, že $D(f')\subset D(f)$, co přibylo (podmínka)? x^2-1 je ve jmenov., tedy $x^2-1\neq 0$, ale na $D(f)$ splňuje $x^2-1>0$, a tak i $\neq 0$, proto $D(f') = D(f)$

(2a) určitý integrál s absolutní hodnotou, ta má nulový bod $2x+1=0 \to 2x=-1 \to x=-\frac{1}{2} \in (-1,2)$ = integrační obor, ten tedy rozdělíme na dva: $(-1,-\frac{1}{2})$ a $(-\frac{1}{2},2)$, na obou již můžeme integrovanou fci zapsat bez absolutní hodnoty: $3(-2x-1)+5 = -6x+2$ pro $x\in(-1,-\frac{1}{2})$ a $3(2x+1)+5 = 6x+8$ pro $x\in(-\frac{1}{2},2)$, tedy

$$\int_{-1}^{2}(3|2x+1|+5)\,dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-6x+2)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{2}(6x+8)\,dx = \left[-6\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left[6\frac{x^2}{2}+8x\right]_{-\frac{1}{2}}^{2} = \left[\left(-3\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+2\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) - \left(-3(-1)^2+2(-1)\right)\right] + \left[\left(3\cdot 2^2+8\cdot 2\right) - \left(3\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+8\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)\right] = -\frac{3}{4}-1+3+2+12+16-\frac{3}{4}+4 = \underline{\underline{34\tfrac{1}{2}}}$$

(2b) per partes: $\int (x-2)\,e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x-2 & v' = e^{-x} \\ u' = 1 & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$

$= (x-2)\cdot(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx = (2-x)\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx =$

$= (2-x)\,e^{-x} - e^{-x} + C = (2-x-1)\,e^{-x} + C = \underline{\underline{(1-x)\,e^{-x} + C,\ x\in\mathbb{R}}}$

(2c) substituce: $\int \frac{(1+\ln x)^3}{x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{(1+t)^3}{1}\,dt =$

$= \int (1+3t+3t^2+t^3)\,dt = t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{3}t^3 + \frac{t^4}{4} + C =$

$= \ln x + \frac{3}{2}\ln^2 x + \ln^3 x + \frac{1}{4}\ln^4 x + C, \quad x > 0$

(3) parabola $y = -x^2+4x-2$, přímka $y = -x+2$

průsečíky: $-x^2+4x-2 = -x+2$

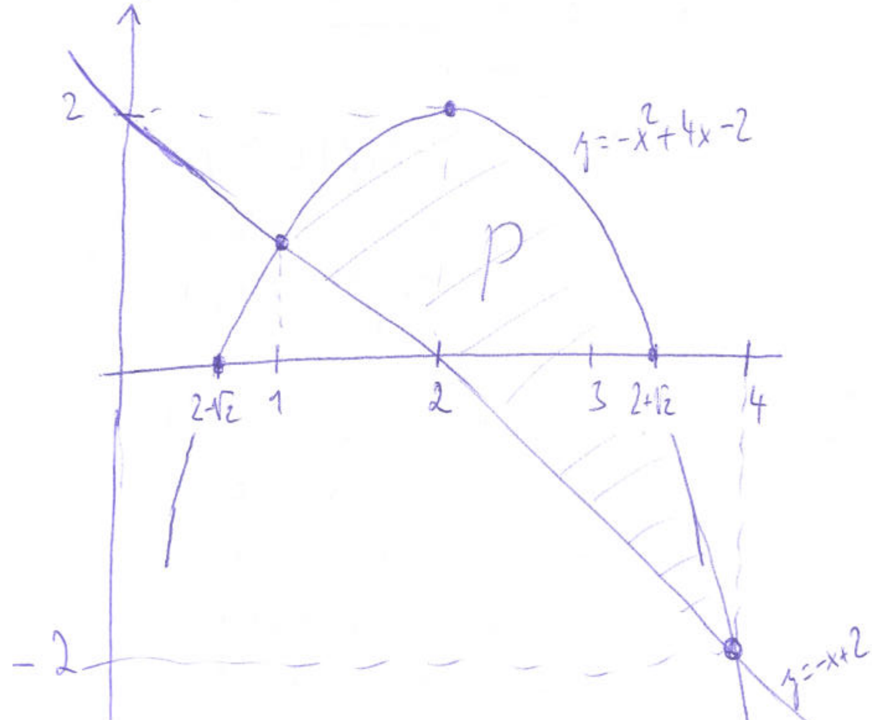
$-x^2+5x-4 = 0$

$x^2-5x+4 = 0 \qquad D = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 25-16 = 9 = 3^2$

$x_{1,2} = \frac{5\pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

Nulové body paraboly: $-x^2+4x-2 = 0$, $D = 16 - 4\cdot(-1)(-2) = 8 = (2\sqrt{2})^2$

$x_{3,4} = \frac{-4\pm 2\sqrt{2}}{-2} = 2\mp\sqrt{2} \doteq \begin{cases} 0{,}6 \\ 3{,}4 \end{cases}$



$P = \int_1^4 \left[(-x^2+4x-2)-(-x+2)\right]dx =$

$= \int_1^4 (-x^2+5x-4)\,dx =$

$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x\right]_1^4 =$

$= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{5}{2}\cdot 4^2 - 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) = \frac{-64+1}{3} + \frac{80-5}{2} - 16 + 4 =$

$= -21 + 37\frac{1}{2} - 12 = \underline{\underline{4\frac{1}{2}\ [j^2]}}$