Písemka LS-2013 **P1–E**

17. dubna 2013

KMA-MAT2/MT2

VZOR 1 ....

1. Jestliže $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, potom pro funkci $f: y = \dfrac{\arcsin(x^2-1)}{\ln x^2} - 13^2$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2\,|x-1|+3)\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x$,

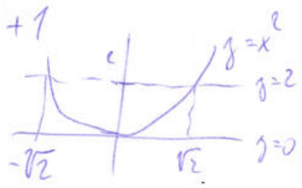
   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$.

3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 2x+1$, a $x - y - 1 = 0$.

1) $D(f)$: $D(\arcsin) = \langle -1; 1\rangle$, tedy $-1 \le x^2 - 1 \le 1 \quad |+1$

$0 \le x^2 \le 2$

$\boxed{x \in \langle -\sqrt{2}; +\sqrt{2}\rangle}$



Jmenovatel: $\ln x^2 \ne 0$

$x^2 \ne 1$

$\boxed{x \ne \pm 1}$

ln: $x^2 > 0$

$\boxed{x \ne 0}$

$D(f) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle \setminus \{-1, 0, 1\} = \langle -\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{2}\rangle$

Derivace: $y' = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} \cdot 2x \cdot \ln x^2 - \arcsin(x^2-1) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}{(\ln x^2)^2} - 0$

$D(f')$: oproti $D(f)$ nové podmínky $\sqrt{1-(x^2-1)^2} \ne 0$ a $x \ne 0$ ta je již splněna

$1 - (x^2-1)^2 \ne 0$

$1 - (x^4 - 2x^2 + 1) \ne 0$

$1 - x^4 + 2x^2 - 1 \ne 0$

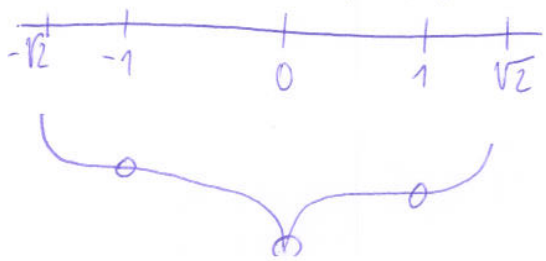
$2x^2 - x^4 \ne 0$

$x^2(2 - x^2) \ne 0 \Rightarrow$ $x^2 \ne 0$ splněno pro $x \in D(f)$; $x^2 \ne 2$ nesplněno, $x \ne \pm\sqrt{2}$

$D(f') = D(f) \setminus \{\pm\sqrt{2}\} =$

$= (-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$

PRO ZAJÍMAVOST



- omezená fce
- v $-1, 0$ a 1 má odstranitelné nespojitosti

Písemka LS-2013 **P1–E**

17. dubna 2013

KMA-MAT2/MT2

VZOR 2

1. Jestliže $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, potom pro funkci $f : y = \dfrac{\arcsin(x^2-1)}{\ln x^2} - 13^2$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2\,|x-1| + 3)\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x$,

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$.

3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 2x+1$, a $x - y - 1 = 0$.

2a $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2|x-1|+3)\,dx$

nulový bod absolutní hodnoty $x_0 = 1 \in (-2,2)$, integrační obor $(-2,2)$ rozdělíme na dva: $(-2,1)$ a $(1,2)$

$$\int_{-2}^{2}(2|x-1|+3)dx = \int_{-2}^{1}(2|x-1|+3)dx + \int_{1}^{2}(2|x-1|+3)dx =$$

$$= \int_{-2}^{1}(2(-x+1)+3)dx + \int_{1}^{2}(2(x-1)+3)dx =$$

$$= \int_{-2}^{1}(-2x+5)dx + \int_{1}^{2}(2x+1)dx = \left[-x^2+5x\right]_{-2}^{1} + \left[x^2+x\right]_{1}^{2} =$$

$$= \left[(-1+5)-(-4-10)\right] + \left[(4+2)-(1+1)\right] = \left[4-(-14)\right] + \left[6-2\right] = \underline{\underline{22}}$$

$$|x-1| = \begin{cases} -x-1 & \text{pro } x<1 \\ x-1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 2|x-1|+3 = \begin{cases} 2(-x-1)+3 & \text{pro } x<1 \\ 2(x-1)+3 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$$

Písemka LS-2013 **P1–E**

17. dubna 2013

KMA-MAT2/MT2

VZOR 3

1. Jestliže $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, potom pro funkci $f: y = \dfrac{\arcsin(x^2-1)}{\ln x^2} - 13^2$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2|x-1|+3)\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x$,

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$.

3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 2x+1$, a $x - y - 1 = 0$.

2b

$$\int x^2\cdot 2^x\,dx = \left[\begin{matrix} u = x^2 & v' = 2^x \\ u' = 2x & v = \frac{2^x}{\ln 2}\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot x^2\cdot 2^x - \frac{2}{\ln 2}\int x\,2^x\,dx = \left[\begin{matrix} u = x & v' = 2^x \\ u' = 1 & v = \frac{2^x}{\ln 2}\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}x^2\cdot 2^x - \frac{2}{\ln 2}\left[\frac{1}{\ln 2}x\cdot 2^x - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}x^2 2^x - \frac{2}{(\ln 2)^2}x 2^x + \frac{2}{(\ln 2)^3}2^x + C$$

$x \in \mathbb{R}$

Písemka LS-2013 $\boxed{\text{P1–E}}$

17. dubna 2013

$\boxed{\text{KMA-MAT2/MT2}}$

VZOR 4

1. Jestliže $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, potom pro funkci $f : y = \dfrac{\arcsin(x^2-1)}{\ln x^2} - 13^2$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2\,|x-1| + 3)\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x$,

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$.

3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 2x + 1$, a $x - y - 1 = 0$.

2c

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{array}\right] = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \operatorname{arctg}(\ln x) + C, \qquad x \in (0, +\infty)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \Big[\operatorname{arctg}(\ln x)\Big]_0^1 = \operatorname{arctg}(\ln 1) - \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}(\underbrace{\ln x}_{-\infty}) =$$

$$= \operatorname{arctg} 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Písemka LS-2013 **P1–E**

17. dubna 2013

KMA-MAT2/MT2

Vzor 5

1. Jestliže $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, potom pro funkci $f : y = \dfrac{\arcsin(x^2-1)}{\ln x^2} - 13^2$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2\,|x-1|+3)\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x$,

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$.

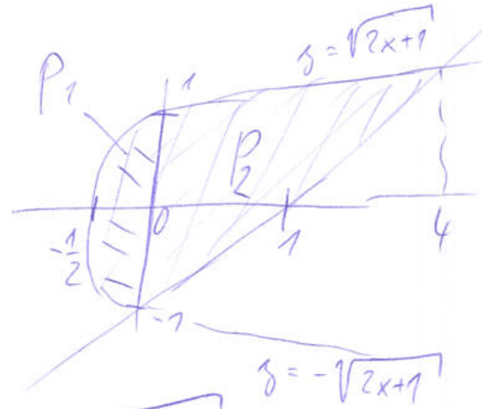
3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 2x+1$, a $x-y-1=0$.

$y^2 = 2x+1 \rightarrow y = \pm\sqrt{2x+1}$

$2x+1 \geq 0$

$2x \geq -1$

$\boxed{x \geq -\frac{1}{2}}$



$x - \cancel{y} - 1 = 0$

$y = x-1$

Průsečíky: $x-1 = \sqrt{2x+1}$ a $x-1 = -\sqrt{2x+1}$

$(x-1)^2 = 2x+1$ $\qquad (x-1)^2 = 2x+1$

$x^2-2x+1 = 2x+1$

$x^2-4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 4$ (to odpovídá obrázku)

$P = P_1 + P_2$

$$P_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\sqrt{2x+1} - (-\sqrt{2x+1})\right) dx = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sqrt{2x+1}\,dx = 2\left[\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\cdot\frac{1}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{1} - \sqrt{0}\right] = \frac{2}{3}[j^2]$$

Písemka LS-2013	P1–E

17. dubna 2013

KMA-MAT2/MT2

VZOR 6 ....

1. Jestliže $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, potom pro funkci $f : y = \dfrac{\arcsin(x^2-1)}{\ln x^2} - 13^2$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2\,|x-1| + 3)\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x$,

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$.

3. Grafický znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 2x+1$, a $x - y - 1 = 0$.

3) Pokračování:

$$P_2 = \int_0^4 \left(\sqrt{2x+1} - (x-1)\right) dx = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^4 =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\sqrt{9^3} - \frac{16}{2} + 4\right] - \left[\frac{1}{3}\sqrt{1}\right] = (9 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{3}\right) = 5 - \frac{1}{3}\ [j^2]$$

$$\left(\int \sqrt{2x+1}\, dx = \left[\begin{array}{l} t = 2x+1 \\ dt = 2dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}\, \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \right.$$

$\frac{1}{2}dt = dx$

$$\left. = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C \right)$$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{2}{3} + 5 - \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}\ [j^2] = \frac{16}{3}\ [j^2]$$

Písemka LS-2013	**P1–E**	17. dubna 2013 KMA-MAT2/MT2	VZOR 7

1. Jestliže $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, potom pro funkci $f : y = \dfrac{\arcsin(x^2-1)}{\ln x^2} - 13^2$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2\,|x-1| + 3)\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x$,

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$.

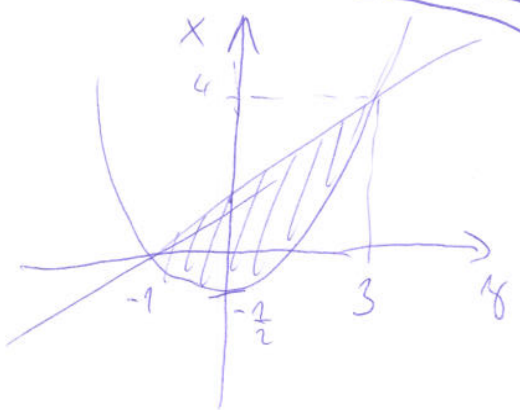
ALTERNATIVNĚ

3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 2x+1$, a $x - y - 1 = 0$.

3a

$x = y + 1$

$x = \dfrac{y^2-1}{2} = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{1}{2}$



$$P = \int_{-1}^{3} \left[(y+1) - \tfrac{1}{2}(y^2-1)\right] dy =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left[y + 1 - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}\right] dy =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + \tfrac{3}{2}\right) dy = \left[-\tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{y^2}{2} + \tfrac{3}{2}y\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(-\tfrac{1}{6}\,27 + \tfrac{9}{2} + \tfrac{9}{2}\right) - \left(+\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\right) = \cancel{-\tfrac{9}{2}} + \cancel{\tfrac{9}{2}} + \tfrac{9}{2} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} =$$

$$= \frac{11}{2} - \frac{1}{6} = \frac{33-1}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3} = 5\tfrac{1}{3}\ [j^2]$$