Písemka LS-2013 **P1–F1**

24. dubna 2013

KMA-MAT2/MT2

VZOR

1. Pro funkci $f : y = \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-1)}{x^2\,e^{2x}}$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.
2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.
   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (|x-1| + |x+1|)\,dx$,
   (b) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$,
   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)\sin x\,dx$.
3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = 0$, $y = x^2 - 2x + 1$, a $y = x^2 - 6x + 9$.

(1) $D(f)$: arctg je def. všude, e^{2x} a x též

zlomek: $x^2 \cdot e^{2x} \neq 0$, $x \neq 0 \wedge e^{2x} \neq 0$ (e^{2x} je vždy >0, tedy $\neq 0$)

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$y' = \frac{\frac{1}{1+(x^2-1)^2} \cdot 2x \cdot x^2 \cdot e^{2x} - \operatorname{arctg}(x^2-1) \cdot [2x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot e^{2x} \cdot 2]}{[x^2 e^{2x}]^2}$$

$D(f')$: jmenovatel je na^2, tedy nulové body (bod) zůstávají, v čitateli je též zlomek $\frac{1}{1+(x^2-1)^2}$ | v jeho jmenovateli je součet 1 a $(x^2-1)^2 \geq 0$, tedy dohromady $\geq 1 \Rightarrow \neq 0$

$D(f') = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2a) Integrál fce s absolutní hodnotou, ta má nulové body $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$, $\pm 1 \in (-2, 2)$. Integrační obor bude rozdělen body x_1 a x_2 na tři intervaly:

$$\int_{-2}^{2} (|x-1| + |x+1|)\,dx = \int_{-2}^{-1} ((1-x)+(-x-1))\,dx + \int_{-1}^{1} ((1-x)+(x+1))\,dx + \int_{1}^{2} ((x-1)+(x+1))\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1} (-2x)\,dx + \int_{-1}^{1} 2\,dx + \int_{1}^{2} 2x\,dx =$$

$x \in \mathbb{R}$

$|x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{pro } x < 1 \\ x-1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$

$|x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{pro } x < -1 \\ x+1 & \text{pro } x \geq -1 \end{cases}$

$$= \left[-x^2\right]_{-2}^{-1} + \left[2x\right]_{-1}^{1} + \left[x^2\right]_{1}^{2} =$$

$$= [-1-(-4)] + [2-(-2)] + [4-1] =$$

$$= -1 + 4 + 2 + 2 + 3 = \underline{\underline{10}}$$

2b $\int \sin^2 x\,dx = \begin{bmatrix} u = \sin x, & v' = \sin x \\ u' = \cos x, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx =$

$= -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx = -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x\,dx$

$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + x, \quad \int \sin^2 x\,dx = \dfrac{x - \sin x \cos x}{2} + C \quad x \in \mathbb{R}$

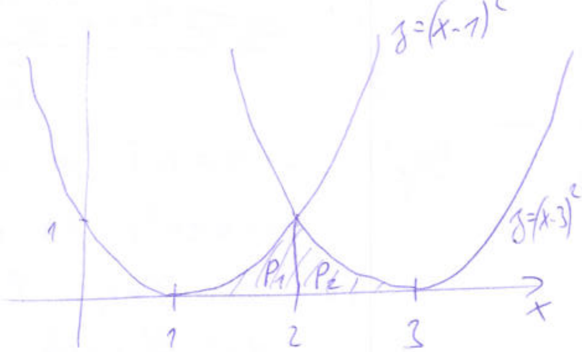
2c $\int (\sin x + \cos x)\sin x\,dx = \int (\sin^2 x + \cos x \sin x)\,dx = \underbrace{\int \sin^2 x\,dx}_{\text{známe z 2b}} +$

$+ \int \cos x \sin x\,dx = \dfrac{x - \sin x \cos x}{2} + \dfrac{\sin^2 x}{2} + C \quad x \in \mathbb{R}$

$\left(\int \cos x \sin x\,dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{bmatrix} = \int t\,dt = \dfrac{t^2}{2} + C = \dfrac{\sin^2 x}{2} + C \right)$

$\int_0^\pi (\sin x + \cos x)\sin x\,dx = \left[\dfrac{x - \sin x\cos x + \sin^2 x}{2} \right]_0^\pi = \left(\dfrac{\pi - 0 + 0}{2} - \dfrac{0-0+0}{2} \right) = \dfrac{\pi}{2}$

3 $y = 0$ (osa x), $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, $y = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$



průsečíky parabol s osou x jsou vlastně jejich nulové body

$(x-1)^2 = 0$ pro $x_1 = 1$

$(x-3)^2 = 0$ pro $x_2 = 3$

průsečíky parabol:

$(x-1)^2 = (x-3)^2$

$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 6x + 9$

$4x - 8 = 0$

$x - 2 = 0 \quad x_3 = 2$

$P_1 = \int_1^2 ((x-1)^2 - 0)\,dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_1^2 =$

$= \left(\dfrac{8}{3} - 4 + 2 \right) - \left(\dfrac{1}{3} - 1 + 1 \right) = \dfrac{7}{3} - 2 = \dfrac{1}{3}\ [j^2]$

$P_2 = \int_2^3 ((x-3)^2 - 0)\,dx = \int_2^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx =$

$= \left[\dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_2^3 = \left(\dfrac{27}{3} - 3\cdot 9 + 9 \cdot 3 \right) - \left(\dfrac{8}{3} - 3\cdot 4 + 9\cdot 2 \right) =$

$= 9 - 27 + 27 - \dfrac{8}{3} + 12 - 18 = 3 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{1}{3}\ [j^2]$

$P = P_1 + P_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}\ [j^2]$