Písemka LS-2013 $\boxed{\text{P1–F2}}$

25. dubna 2013

KMA-MAT2/MT2

VZOR ....

1. Pro funkci $\quad f : y = \dfrac{\operatorname{arctg}(x^3+1)}{x\,e^{-2x}} \quad$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (|x-1| + |x+2|)\,dx$,

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\,dx$,

(c) $\displaystyle\int (x\ln x + \ln^2 x)\frac{dx}{x}$.

3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $\quad y = x^2+1, \quad y = x^2-2x+1 \quad$ a $\quad y = x^2-4x+5$.

(1) $D(f)$: $D(\text{arctg}) = \mathbb{R} \Rightarrow$ čitatel je def. všude na $\mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R})$

x a e^{-2x} je také def. $\forall x \in \mathbb{R}$,

Jmenovatel $\neq 0 \rightarrow x \cdot e^{-2x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ $\left(e^{-2x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{-2x} \neq 0\right)$

Dohromady: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Derivace (podíl, v čit. a jm. složené fce)

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{1+(x^3+1)^2}\cdot 3x^2\right)\cdot x \cdot e^{-2x} - \operatorname{arctg}(x^3+1)\cdot\left[1\cdot e^{-2x} + x\cdot e^{-2x}\cdot(-2)\right]}{\left(x\cdot e^{-2x}\right)^2}$$

$D(f')$: nový dílčí jmenov. $1+(x^3+1)^2$ je ≥ 1, tudíž $\neq 0$; ostatní (také) zůstává, tedy $D(f') = D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(2a) nulové body fcí v abs. hodnotě: $x-1 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \in (-2, 2)$

$x+2 = 0 \rightarrow x_2 = -2$ - krajní bod $(-2,2)$ (nerozděluje na 2 int.)

tedy $|x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{pro } x \leq 1 \\ x-1 & \text{pro } x > 1 \end{cases}$

$|x+2| = \begin{cases} -x-2 & \text{pro } x \leq -2 \\ x+2 & \text{pro } x > -2 \end{cases}$

$$\int_{-2}^{2} (|x-1| + |x+2|)\,dx = \int_{-2}^{1} (|x-1| + |x+2|)\,dx + \int_{1}^{2} (|x-1| + |x+2|)\,dx = \int_{-2}^{1} [(1-x)+(x+2)]\,dx + \int_{1}^{2} [(x-1)+(x+2)]\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} (3)\,dx + \int_{1}^{2} (2x+1)\,dx = \left[3x\right]_{-2}^{1} + \left[x^2+x\right]_{1}^{2} = \left[3\cdot 1 - 3(-2)\right] + \left[(2^2+2) - (1^2+1)\right] =$$

$$= (3+6) + (6-2) = 9 + 4 = \underline{\underline{13}}$$

(2b) $\int \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & v'=1 \\ u'=\frac{1}{x} & v=x \end{bmatrix} = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - \int dx =$

$= x\ln x - x + C, \quad x\in(0,+\infty)$

$\underline{\underline{\int_0^1 \ln x\,dx}} = \left[x\ln x - x\right]_0^1 = (1\cdot\ln 1 - 1) - \lim_{x\to 0^+}(x\overset{0}{\ln x} - x) =$

$= (1\cdot 0 - 1) - (0 - 0) = \underline{\underline{-1}}$

$\left(\lim_{x\to 0^+} x\ln x = [0\cdot\infty] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0\right)$

(2c) $\int (x\ln x + \ln^2 x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = \int\left(\ln x + \frac{\ln^2 x}{x}\right)dx = \int \ln x\,dx + \int\frac{\ln^2 x}{x}dx =$

$\underline{= (x\ln x - x) + \left(\frac{\ln^3 x}{3}\right) + C} \quad x\in(0,+\infty)$

$\left(\int\frac{\ln^2 x}{x}dx = \begin{bmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{bmatrix} = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C\right)$

(3) $y = x^2+1, \quad y = x^2-2x+1 = (x-1)^2, \quad y = x^2-4x+5 = (x-2)^2+1$

Průsečíky: $x^2+1 = x^2-2x+1$

$0 = -2x \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$

$x^2+1 = x^2-4x+5$

$0 = -4x+4$

$4x = 4$

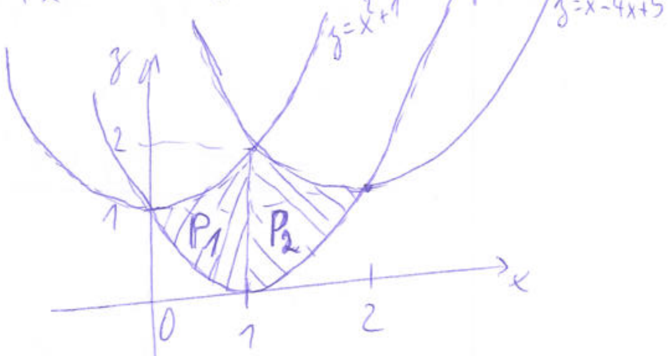
$\underline{x_2 = 1}$

$x^2-2x+1 = x^2-4x+5$

$0 = -2x+4$

$2x = 4$

$\underline{x_3 = 2}$



Konečnou plochu P rozdělíme na dvě, P_1 a P_2 (viz obrázek), abychom mohli použít určitý integrál. Plocha P_1 je zdola omezena grafem $y=x^2-2x+1$, shora potom grafem $y=x^2+1$, podobně je $\boxed{\begin{matrix} y=x^2-4x+5 \\ P_2 \\ y=x^2-2x+1 \end{matrix}}$. Počítáme tedy

$P_1 = \int_0^1 \left[(x^2+1)-(x^2-2x+1)\right]dx = \int_0^1 (2x)\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1-0 = \underline{1}\ [j^2]$

$P_2 = \int_1^2 \left[(x^2-4x+5)-(x^2-2x+1)\right]dx = \int_1^2 (-2x+4)\,dx = \left[-x^2+4x\right]_1^2 = (-2^2+4\cdot 2)-(-1^2+4\cdot 1) =$

$= (-4+8)-(-1+4) = 4-3 = \underline{1}\ [j^2]$

Celkově: $P = P_1 + P_2 = 1+1 = \underline{\underline{2\ [j^2]}}$