Písemka LS-2014 **P1–A**

24. března 2014

KMA-MAT2/MT2

VZOR

15 1. Pro funkci $f: y = \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-1)}{x^2\,e^{2x}}$ určete $D(f)$, f' a $D(f')$.

30 2. Vypočtěte následující integrály. Nezapomeňte na určení příslušných intervalů.

(10) (a) $\int_{-2}^{2}(|x-1|+|x+1|)\,dx$, $= 10$

(10) (b) $\int x\cos x\,dx$, $= x\cdot\sin x+\cos x+C$

(10) (c) $\int_0^{\pi}\cos x\sin x\,dx.$ $=0$

15 3. Graficky znázorněte a vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y=0$, $y=x^2-2x+1$, a $y=x^2-6x+9$.

(1) $D(f):\ x^2\cdot e^{2x}\neq 0 \iff x\neq 0 \qquad D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}\cdot x^2 e^{2x}-\operatorname{arctg}(x^2-1)\cdot\left[2x\cdot e^{2x}+x^2\cdot e^{2x}\cdot 2\right]}{(x^2e^{2x})^2}$$

$D(f')=D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(2a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(|x-1|+|x+1|)\,dx$ n.b. 1, n.b. −1

$$=\int_{-2}^{-1}(\underbrace{|x-1|}_{<0}+\underbrace{|x+1|}_{\le 0})\,dx+\int_{-1}^{1}(\underbrace{|x-1|}_{\le 0}+\underbrace{|x+1|}_{\ge 0})\,dx+\int_{1}^{2}(\underbrace{|x-1|}_{\ge 0}+\underbrace{|x+1|}_{>0})\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{-1}((1-x)-(x+1))\,dx+\int_{-1}^{1}((1-x)+(x+1))\,dx+\int_{1}^{2}((x-1)+(x+1))\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-2x)\,dx+\int_{-1}^{1}2\,dx+\int_{1}^{2}2x\,dx=\left[-x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[2x\right]_{-1}^{1}+\left[x^2\right]_{1}^{2}=$$

$$=(-1+4)+(2+2)+(4-1)=3+4+3=\underline{\underline{10}}$$

Alternativně:

N.B. $x_1=-1$, $x_2=1$

	$(-\infty,-1)$	$\langle -1,1)$	$\langle 1,+\infty)$
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	$1-x$	$x-1$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x+1\rvert+\lvert x-1\rvert$	$-2x$	2	$2x$
$\int(\lvert x+1\rvert+\lvert x-1\rvert)\,dx$	$-x^2$	$2x$	x^2

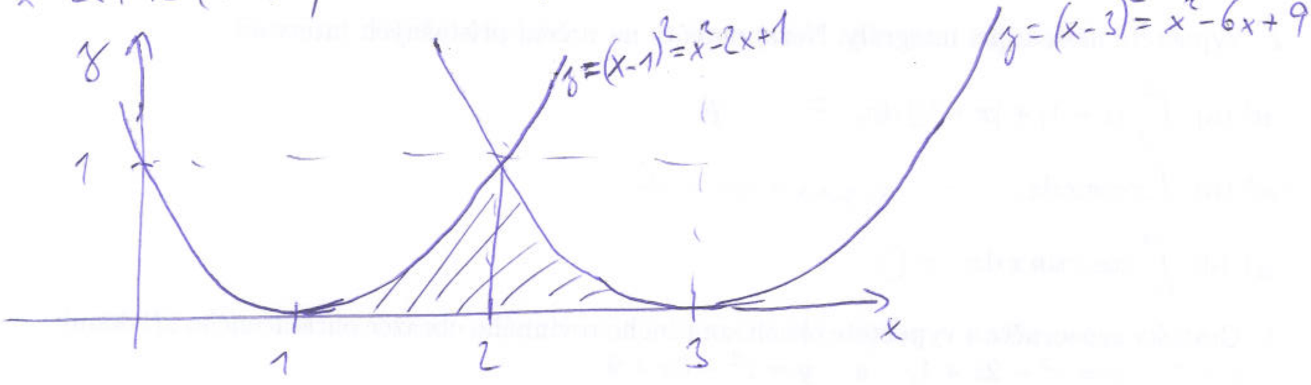
Integrály $\int -2x\,dx$, $\int 2\,dx$, $\int 2x\,dx$ samostatně existují pro $x\in\mathbb{R}$. My je ovšem máme fixovány na intervalech $\langle -2,-1)$, $\langle -1,1\rangle$ a $\langle 1,2\rangle$, kde umí řešit výrazy s absolutní hodnotou.

(2b) $\int x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u=x & v'=\cos x \\ u'=1 & v=\sin x \end{bmatrix} = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C,\ x\in\mathbb{R}$

(2c) $\int_0^{\pi} \cos x \sin x\,dx = \left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{0}{2} - \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$

$\int \cos x \sin x\,dx = \begin{bmatrix} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \end{bmatrix} = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C,\ x\in\mathbb{R}$

(3) $x^2-2x+1=(x-1)^2,\quad x^2-6x+9=(x-3)^2$



$$P = \int_1^2 (x^2-2x+1)\,dx + \int_2^3 (x^2-6x+9)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_2^3 =$$

$$= \left[\left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right)\right] + \left[\left(\frac{27}{3} - 3\cdot 9 + 9\cdot 3\right) - \left(\frac{8}{3} - 3\cdot 4 + 9\cdot 2\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{7}{3} - 2\right) + \left(\frac{19}{3} - 6\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\ [j^2]}}$$

(Dílčí integrály jsou def. na $\mathbb{R}$, a tedy i na intervalech $\langle 1,2\rangle$ a $\langle 2,3\rangle$).