

Písemka je zamýšlena bez „taháku“, složitější vzorce budou součástí zadání. Přesnější popis následuje.

#### KONKRÉTNÍ POŽADAVKY:

1. Zopakovat si derivace (tabulkové vzorce, pravidla pro derivace součtu, rozdílu, součinu, podílu,  $cf(x)$  a složené funkce).

2. Znáť tabulkové integrály pro funkce

$$x^m, \frac{1}{x}, e^x, a^x, \cos x, \sin x, \frac{1}{\cos^2 x}, \frac{-1}{\sin^2 x} \text{ a } \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Znáť základní pravidla pro integraci:  $\int (f(x) \pm g(x)) dx$  a  $\int k \cdot f(x) dx$ .

4. Rozeznat základní situace, kdy lze použít metodu substituční (v integrované funkci nalezneme součin „tabulkové“ funkce a její derivace, nebo tabulkovou funkci s lineárním argumentem). Například

- $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \left[ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] = \int t^3 dt = \dots,$
- $\int \frac{5 dx}{x\sqrt{\ln^3 x}} = \left[ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] = \int \frac{5 dt}{\sqrt{t^3}} = 5 \int t^{-\frac{3}{2}} dt = \dots,$
- $\int \cos^5 x \sin x dx = \left[ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ -dt = \sin x dx \end{array} \right] = - \int t^5 dt = \dots$

5. Znáť metodu per partes a rozeznat základní situace, kdy ji lze úspěšně použít, zejména  $\int x^2 \cos x dx$ ,  $\int x \cos x dx$ ,  $\int x^2 \sin x dx$ ,  $\int x \sin x dx$ ,  $\int x^2 e^x dx$ ,  $\int x e^x dx$ , ...

6. Znáť Newtonův vzorec pro výpočet určitého integrálu:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

7. Znáť základní pravidla pro výpočet určitého integrálu, zejména

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

a umět je aplikovat v jednoduchých situacích typu:“

- $\int_{-1}^3 (2|x-1| + 7) dx = \int_{-1}^1 (2(1-x) + 7) dx + \int_1^3 (2(x-1) + 7) dx = \dots,$
- Vypočtete  $\int_0^4 f(x) dx$  pro funkci zadanou po částech:  $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \leq 3, \\ 3x-6, & x > 3. \end{cases}$

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^3 (2x-3) dx + \int_3^4 (3x-6) dx = \dots$$

8. Znáť princípy výpočtu:

- obsahů rovinných ploch,
- délek křivek,
- objemů a povrchů rotačních ploch,
- hmotnosti a souřadnice těžiště křivek a rovinných útvarů.

## Vybrané příklady

„Přímá“ integrace:

$$\int (3x^3 - 6x^2 + 25) dx, \int \left( \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{16}{\cos^2 x} + \sin x + \cos 2x - 1 \right) dx, \int \operatorname{tg}^2 x dx, \int \operatorname{tg} 2x dx, \\ \int 2x^{-1} dx, \int 5x^6 dx, \int 4x^{-5} dx, \int 2x(x-2) dx, \int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^3} dx, \int \frac{2x - \sqrt{x}}{x} dx, \\ \int \sqrt{x}(1+2x) dx, \int (2^x + 5^x)^2 dx, \int \frac{(2^x - 5^x)^2}{6^x} dx, \int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx.$$

Per partes:

$$\int (x^2 + 1)e^{-x} dx, \int (2x - 1) \ln x dx, \int \operatorname{arctg} x dx, \int \operatorname{arccotg} x dx, \int e^x \sin x dx, \int \sin^2 x dx, \\ \int \cos^2 x dx, \int \frac{x}{\cos^2 x} dx, \int x3^x dx, \int x \cos x dx, \int x \sin x dx, \int x \sin^2 x dx, \int x^2 \sin 2x dx, \\ \int x^3 e^x dx, \int x^2 \ln x dx, \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Metoda substituční:

$$\int \sqrt{x^2 - 3}(2x) dx, \int e^{-x^2}(-2x) dx, \int \sin^6 x \cos x dx, \int (4 - 7x)^{10}(-7) dx, \int (1 + \ln x)^4 \frac{1}{x} dx, \\ \int \ln(\operatorname{arctg} x) \frac{1}{1+x^2} dx, \int \frac{(1 + \ln x)^4}{x} dx, \int \sin x \cos^5 x dx, \int x e^{-x^2} dx, \int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx, \\ \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}, \int \frac{5 dx}{1 + (2 - 5x)^2}.$$

Určitý integrál:

$$\int_1^2 x^2 dx \quad \left[ \frac{7}{3} \right], \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} \quad \left[ \frac{\pi}{2} \right], \int_0^\pi \sin x dx \quad [2], \int_{-\frac{\pi}{2}}^\pi (x-1) \sin x dx \quad [\pi], \\ \int_0^\pi x^2 \cos x dx \quad [-2\pi].$$

Aplikace – obsahy:

Graficky znázorněte a vypočítejte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného křivkami:

1.  $g : y = x^2 + x - 3$  a  $f : y = -x^2 - 2x + 2$   $\left[ \frac{343}{24} \right]$ ,
2.  $y = 0, x = -1, y = x^2$   $\left[ \frac{1}{3} \right]$ ,
3.  $y = 1 - x^2, y = 0$   $\left[ \frac{4}{3} \right]$ ,

4.  $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1 \quad \left[ e + \frac{1}{e} - 2 \right],$
5.  $xy = 1, x = 1, x = 3, y = 0 \quad [\ln 3],$
6.  $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0 \quad [5],$
7.  $y(1 + x^2) = 1, y = \frac{x^2}{2} \quad \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right],$
8.  $y = \ln x, x = 5, x = 7, y = 0 \quad [7 \ln 7 - 2 - 5 \ln 5],$
9.  $y = |\log_{10} x|, x = \frac{1}{10}, x = 10, y = 0 \quad \left[ \frac{9}{10} \frac{11 \ln 10 - 9}{\ln 10} = \frac{9,9 \ln 10 - 8,1}{\ln 10} \right],$
10.  $y = -x^2 + 4x - 2, x + y = 2 \quad \left[ \frac{9}{2} \right].$