Písemka LS-2015 **P1–A**

30. března 2015

KMA-MAT2/MT2

VZOR 1

1. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{2x - x^3 + 3\sqrt{x}}{x^3}\,\mathrm{d}x$ (nezapomeňte na určení intervalů).

2. Vypočtěte integrál $I = \int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (nejprve neurčitý).

3. Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

4. Načrtněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = -\frac{y}{t}$.

(1)

$$\int \frac{2x - x^3 + 3\sqrt{x}}{x^3}\,dx = \int\left(\frac{2x}{x^3} - \frac{x^3}{x^3} + 3\,\frac{\sqrt{x}}{x^3}\right)dx =$$

$$= \int\left(2\cdot x^{-2} - 1 + 3\,x^{-\frac{5}{2}}\right)dx = 2\,\frac{x^{-1}}{-1} - x + 3\cdot\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + C =$$

$$= -2\cdot x^{-1} - x - 2\cdot x^{-\frac{3}{2}} + C = \frac{-2}{x} - x - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + C, \quad x \in (0, +\infty)$$

(2)

$$\int x\cdot e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x & v' = e^{-x} \\ u' = 1 & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C$$

$x \in R$

$$\int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,dx = \Big[(-x-1)\cdot e^{-x}\Big]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}(-x-1)\cdot e^{-x} - \lim_{x\to 0^+}(-x-1)\cdot e^{-x} =$$

$$= 0 - (-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(-x-1)\cdot e^{-x} = \left[-\infty\cdot 0_{ND}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{e^{+x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=}$$

$$\overset{LP}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{e^x} = \left[\frac{-1}{\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x-1)e^{-x} = \left[-1\cdot 1\right] = -1$$

Písemka LS-2015 **P1–A** 30. března 2015 KMA-MAT2/MT2 VZOR 2

1. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{2x - x^3 + 3\sqrt{x}}{x^3}\,dx$ (nezapomeňte na určení intervalů).

2. Vypočtěte integrál $I = \int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx$ (nejprve neurčitý).

3. Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

4. Načrtněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = -\frac{y}{t}$.

③ $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$; $D(f) = \mathbb{R}^2$

$f'_x(x,y) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2) + e^{\frac{x}{2}}(1) = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 1\right)$

$f'_y(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(2y)$

Stacionární body $\begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0 \\ 2y = 0 \end{array}$

$\Downarrow$

$y = 0$

$\frac{1}{2}\cdot 0^2 + \frac{1}{2}x = -1$

$x = -2$

$A[-2,0]$ jediný stac. b.

$f''_{xx}(x,y) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 1\right) + e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + 1\right)$

$f''_{xy} = f''_{yx}(x,y) = e^{\frac{x}{2}}\cdot y$

$f''_{yy}(x,y) = 2e^{\frac{x}{2}}$

$D_1(-2,0) = f''_{xx}(-2,0) = e^{-\frac{2}{2}}\left(\frac{1}{4}(-2) + \frac{1}{4}\cdot 0 + 1\right) =$

$= e^{-1}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}e^{-1} > 0$

$D_2(-2,0) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-1} & e^{-1}\cdot 0 \\ e^{-1}\cdot 0 & 2\cdot e^{-1} \end{pmatrix} = e^{-2} > 0$

$\Rightarrow$ f má v bodě $A[-2,0]$ ostré lokální minimum

$f(-2,0) = e^{-1}(-2+0) = -2\cdot e^{-1}$.

Písemka LS-2015 P1–A

30. března 2015

KMA-MAT2/MT2

VZOR 3

1. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{2x - x^3 + 3\sqrt{x}}{x^3}\,dx$ (nezapomeňte na určení intervalů).

2. Vypočtěte integrál $I = \int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx$ (nejprve neurčitý).

3. Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

4. Načrtněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = -\frac{y}{t}$.

$y' = -\frac{y}{t}, \quad t \neq 0 \qquad G_1 = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$

$G_2 = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$

$y' = C, \quad -\frac{y}{t} = C, \quad -y = Ct, \quad \underline{y = -Ct}, \quad C \in \mathbb{R}, \ t \neq 0$

$C = 0, \quad y = 0$

$C = 1, \quad y = -t$

$C = -1, \quad y = t$

$C = 2, \quad y = -2t$

$C = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}t$

$C = -2, \quad y = 2t$