2. dubna 2015

~~30. března 2015~~

Písemka LS-2015 | P1–$\mathbb{B}$ | KMA-MAT2/MT2 | VZOR/1

1. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{2^x \sin^2 x - 2}{\sin^2 x}\,dx$ (nezapomeňte na určení intervalů).

2. Vypočtěte integrál $I = \displaystyle\int_{-e}^{1} \ln|x|\,dx$ (nejprve neurčitý).

3. Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$.

4. Načrtněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = -\dfrac{t}{y}$.

(1)
$$\int \frac{2^x \sin^2 x - 2}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{2^x \sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx =$$
$$= \int \left(2^x - \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx = \int 2^x dx + 2\int \frac{-1}{\sin^2 x}\,dx =$$
$$= \frac{2^x}{\ln 2} + 2\cdot \operatorname{cotg} x + C, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ tzn., že } x \in (0,\pi) \text{ apod.}$$

(2) $\int \ln|x|\,dx$, $x \neq 0$

a) $x > 0$: $\displaystyle\int \ln|x|\,dx = \int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{bmatrix} =$

$= x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\cdot dx = x\ln x - \int 1\,dx =$

$= x\ln x - x + C$, $x > 0 \leftarrow$ zde spojitá

b) $x < 0$: $\displaystyle\int \ln|x|\,dx = \int \ln(-x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln(-x) & v' = 1 \\ u' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} & v = x \end{bmatrix} =$

$= x\cdot\ln(-x) - \int \frac{+1}{x}\cdot x\,dx = x\ln(-x) - \int dx =$

$= x\ln(-x) - x + C$, $x < 0$ zde spojitá

Integrujeme přes interval $(-e,1)$ kam patří i 0. Budou nás tedy zajímat jednostranné limity získaných primitivních funkcí v 0.

Písemka LS-2015 P1–$\mathbb{B}$

2. dubna ~~30. března~~ 2015

KMA-MAT2/MT2

VZOR /2

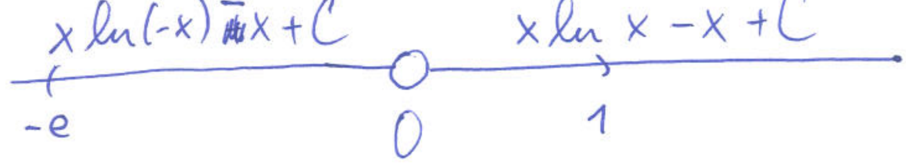
1. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{2^x \sin^2 x - 2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ (nezapomeňte na určení intervalů).

2. Vypočtěte integrál $I = \displaystyle\int_{-\mathrm{e}}^{1} \ln|x|\,\mathrm{d}x$ (nejprve neurčitý).

3. Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$.

4. Načrtněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = -\dfrac{t}{y}$.

(2) pokračování




Hledáme zobecněnou primitivní funkci na intervalu $(-e, 1)$.

$$\lim_{x\to 0^-}\left[x\ln(-x) - x\right] = \left[0^-(-\infty) - 0^-\right] = [0-0] = 0$$

ND

$$\left(\lim_{x\to 0^-} x\ln(-x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-1}{-x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{-1} = \lim_{x\to 0^-} -x = 0\right)$$

Podobně z druhé strany

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\ln x - x\right] = [0-0] = 0,$$

a tak funkce $F(x) = \begin{cases} x\ln(-x) - x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x\ln x - x, & x>0,\end{cases}$

je spojitá na $\mathbb{R}$ (a tudíž i na $[-e, 1]$), přičemž její derivace je rovna $\ln|x|$ pro všechna $x\in[-e,1]$ kromě 0. Jde tedy o zobecněnou primitivní fci fce $\ln|x|$ na $[-e,1]$.

2. dubna
~~30. března~~ 2015

Písemka LS-2015 **P1–B**

KMA-MAT2/MT2

VZOR /3

1. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{2^x \sin^2 x - 2}{\sin^2 x}\,dx$ (nezapomeňte na určení intervalů).

2. Vypočtěte integrál $I = \int_{-e}^{1} \ln|x|\,dx$ (nejprve neurčitý).

3. Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$.

4. Načrtněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = -\frac{t}{y}$.

(2) – ještě jedno pokračování!

$$I = \int_{-e}^{1} \ln|x|\,dx = \left[F(x)\right]_{-e}^{1} = \lim_{x\to 1^-} F(x) - \lim_{x\to -e^+} F(x) =$$
$$= F(1) - F(-e) = (1\cdot\ln 1 - 1) - (-e\ln(+e) + e) =$$
$$= (0-1) - (-e+e) = \underline{\underline{-1}}$$

(3) $D(f) = \mathbb{R}^2$, $f'_x(x,y) = 3y - 2xy - y^2$, $f'_y(x,y) = 3x - x^2 - 2xy$, $D(f'_x) = D(f'_y) = \mathbb{R}^2$

stacionární body: $y(3-2x-y)=0 \to y=0$ a), $y = 3-2x$ b)
$x(3-x-2y)=0$

a) ($y=0$) $x(3-x-2\cdot 0)=0$
$\cancel{3x - x^2 = 0}$
$x(3-x)=0 \Rightarrow x=0$ $A_1[0,0]$, $x=3$ $A_2[3,0]$

b) ($y=3-2x$) $x(3-x-2(3-2x))=0$
$x(3-x-6+4x)=0$
$x(-3+3x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1$
$3x(x-1)=0$
$A_3[0, 3-2\cdot 0] = A_3[0,3]$
$A_4[1,1]$

$f''_{xx}(x,y) = -2y$
$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 3-2x-2y$
$f''_{yy}(x,y) = -2x$

$D_1(x,y) = -2y$, $D_2(x,y) = \begin{vmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{vmatrix}$

$A_1[0,0]$, $D_2(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$ LExtr. neex.

$A_2[3,0]$, $D_2(3,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -9 < 0$ — " —

$A_3[0,3]$, $D_2(0,3) = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$ — " —

$A_4[1,1]$, $D_2(1,1) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 > 0$, $D_1(1,1) = -2$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $f$ má v $A_4[1,1]$ ostré lokální maximum

$f(1,1) = 3-1-1 = 1.$

| Písemka LS-2015 | P1–$\mathbb{B}$ |
| --- | --- |

2. dubna ~~30. března~~ 2015

KMA-MAT2/MT2

VZOR / 4

1. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{2^x \sin^2 x - 2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ (nezapomeňte na určení intervalů).

2. Vypočtěte integrál $I = \displaystyle\int_{-e}^{1} \ln|x|\,\mathrm{d}x$ (nejprve neurčitý).

3. Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$.

4. Načrtněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = -\dfrac{t}{y}$.

(4) $y' = -\dfrac{t}{y}$, $y \neq 0$, $G_1 = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$

$G_2 = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$

$f(t,y) = -\dfrac{t}{y}$, $-\dfrac{t}{y} = C$, $y = -\dfrac{t}{C}$, $C \neq 0$ (pro $C=0$ dostáváme z předchozího $-\dfrac{t}{y} = 0$, tedy $t = 0$ osa $y$, ovšem bez 0)

$C = 1$: $y = -t$

$C = -1$: $y = t$

$C = 2$: $y = -\frac{1}{2}t$

$C = -2$: $y = \frac{1}{2}t$

$C = \frac{1}{2}$: $y = -2t$

$C = -\frac{1}{2}$: $y = 2t$