KMA \ MAT MT 2 —— Úlohy pro samostatnou práci —— Interpolace + aproximace dat

1 Interpolace

Příklad 1. *Pro uzly x_i a funkční hodnoty f_i dané tabulkou*

i	0	1	2
x_i	-3	-1	1
f_i	1	-1	2

sestavte interpolační polynom: a) v základním tvaru, b) v Lagrangeově tvaru.

Řešení. ad a) $n = 2$, a tak hledáme kvadratický interpolační polynom tvaru

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Dosazením do interpolačních rovnic

$$p(x_i) = f_i, \ i = 0, 1, 2,$$

dostaneme soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých:

$$\begin{array}{rcrcrcr} p(-3) & = & 1 & \Longrightarrow & a_0 - 3a_1 + 9a_2 & = & 1, \\ p(-1) & = & -1 & \Longrightarrow & a_0 - a_1 + a_2 & = & -1, \\ p(1) & = & 2 & \Longrightarrow & a_0 + a_1 + a_2 & = & 2. \end{array}$$

V maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Po vyřešení dostáváme $a_0 = -\frac{1}{8}$, $a_1 = \frac{3}{2}$ a $a_2 = \frac{5}{8}$. Hledaný interpolační polynom má tvar

$$p(x) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}x^2.$$

ad b) Interpolační polynom v Lagrangeově tvaru je dán předpisem

$$p(x) = f_0\varphi_0(x) + f_1\varphi_1(x) + f_2\varphi_2(x),$$

kde $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ jsou polynomy Lagrangeovy báze dané úlohy:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{(x+1)(x-1)}{(-3+1)(-3-1)} = \frac{1}{8}(x+1)(x-1), \\ \varphi_1 &= \frac{(x+3)(x-1)}{(-1+3)(-1-1)} = -\frac{1}{4}(x+3)(x-1), \\ \varphi_2 &= \frac{(x+3)(x+1)}{(1+3)(1+1)} = \frac{1}{8}(x+3)(x+1). \end{aligned}$$

Celkově tedy

$$p(x) = \frac{1}{8}(x+1)(x-1) + \frac{1}{4}(x+3)(x-1) + \frac{1}{4}(x+3)(x+1).$$

□

Úloha 1. *Pro uzly x_i a funkční hodnoty f_i dané tabulkou*

i	0	1	2
x_i	1	2	3
f_i	2	1	3

sestavte interpolační polynom: a) v základním tvaru, b) v Lagrangeově tvaru.

Úloha 2. *Pro uzly x_i a funkční hodnoty f_i dané tabulkou*

i	0	1	2	3
x_i	-4	-2	-1	0
f_i	0	0	1	0

sestavte interpolační polynom: a) v základním tvaru, b) v Lagrangeově tvaru.

2 Aproximace metodou nejmenších čtverců

Hledáme funkci φ, pro niž je

$$\varphi(x_i) \approx f_i, \ i = 0, 1, \ldots, n,$$

kde přibližná rovnost „$\approx$“ je určena tak, aby součet druhých mocnin (čtverců) odchylek mezi předepsanými hodnotami f_i a hodnotami $\varphi(x_i)$ byl minimální.

Nechť je předepsán systém daných funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$. Uvažujeme všechny funkce φ v následujícím tvaru:

$$\varphi(x) := c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j(x),$$

kde koeficienty $c_1, \ldots, c_m$ jsou libovolná reálná čísla. Například $\varphi(x) := c_1 + c_2x$ nebo $\varphi(x) := c_1\sin(x) + c_2\cos(x)$.

Funkci φ^*, která má minimální součet druhých mocnin (čtverců) odchylek mezi předepsanými hodnotami f_i a hodnotami $\varphi(x_i)$, tedy

$$\sum_{i=0}^{n}(\varphi^*(x_i) - f_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n}(\varphi(x_i) - f_i)^2, \quad \text{pro všechna } \varphi,$$

nazýváme *aproximací podle metody nejmenších čtverců*. Její koeficienty $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_m^*$ určíme jako minimum funkce

$$\Psi(c_1, \ldots, c_m) := \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j(x_i) - f_i\right)^2,$$

které vyhovuje rovnicím

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c_k}(c_1^*, \ldots, c_m^*) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Po dosazení parciálních derivací

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c_k} = 2 \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x_i) - f_i \right) \varphi_k(x_i)$$

do (1) dostaneme soustavu m lineármích rovnic o m neznámých $c_1^*, \ldots, c_m^*$:

$$2 \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} c_j^* \varphi_j(x_i) - f_i \right) \varphi_k(x_i) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Po jednoduché úpravě:

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) \right) c_j^* = \sum_{i=0}^{n} f_i \varphi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Soustava (2) se nazývá *soustava normálních rovnic.*

Příklad 2. *Napište normální soustavu lineárních rovnic odpovídající systému funkcí*

$$\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad \varphi_2(x) = \sin x.$$

Aproximujte data

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
f_i	10	4	6	3

.

Řešení. Funkce φ_j jsou dvě, tedy $m = 2$. Uzly x_i jsou čtyři, tedy $n = 3$.

Soustava normálních rovnic:

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{i=0}^{3} \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) \right) c_j^* = \sum_{i=0}^{3} f_i \varphi_k(x_i), \quad k = 1, \ldots, 2.$$

Rozepíšeme pro $k = 1$ a $k = 2$

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{i=0}^{3} \varphi_j(x_i) \varphi_1(x_i) \right) c_j^* = \sum_{i=0}^{3} f_i \varphi_1(x_i),$$

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{i=0}^{3} \varphi_j(x_i) \varphi_2(x_i) \right) c_j^* = \sum_{i=0}^{3} f_i \varphi_2(x_i).$$

Na levých stranách rozepíšeme pro $j = 1$ a $j = 2$. Tím bude zřejmější, že jde soustavu dvou rovnic o dvou neznámých c_1^* a c_2^*:

$$\left(\sum_{i=0}^{3} \varphi_1(x_i) \varphi_1(x_i) \right) c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3} \varphi_2(x_i) \varphi_1(x_i) \right) c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i \varphi_1(x_i),$$

$$\underline{\left(\sum_{i=0}^{3}\varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i)\right)c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3}\varphi_2(x_i)\varphi_2(x_i)\right)c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i\varphi_2(x_i).}$$

Ještě dosadíme ze zadání $\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ a $\varphi_2(x) = \sin x$:

$$\left(\sum_{i=0}^{3}\mathrm{e}^{-x_i}\,\mathrm{e}^{-x_i}\right)c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3}(\sin x_i)\,\mathrm{e}^{-x_i}\right)c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i\,\mathrm{e}^{-x_i},$$

$$\underline{\left(\sum_{i=0}^{3}\mathrm{e}^{-x_i}(\sin x_i)\right)c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3}(\sin x_i)(\sin x_i)\right)c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i(\sin x_i).}$$

Po drobné úpravě (druhé mocniny) dostáváme normální soustavu s oddělenými jednotlivými koeficienty:

$$\left(\sum_{i=0}^{3}\left(\mathrm{e}^{-x_i}\right)^2\right)c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3}(\sin x_i)\,\mathrm{e}^{-x_i}\right)c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i\,\mathrm{e}^{-x_i},$$

$$\underline{\left(\sum_{i=0}^{3}\mathrm{e}^{-x_i}(\sin x_i)\right)c_1^* + \left(\sum_{i=0}^{3}(\sin x_i)^2\right)c_2^* = \sum_{i=0}^{3} f_i(\sin x_i).}$$

Tím je úloha splněna.

Pro případné další řešení této normální soustavy je potřeba vypočíst jednotlivé koeficienty, tedy:

$$\sum_{i=0}^{3}\left(\mathrm{e}^{-x_i}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{-x_0}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-x_1}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-x_2}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-x_3}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{2}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{1}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-2}\right)^2 \doteq 62{,}14.$$

Podobně další tři koeficienty na levé straně:

$$\sum_{i=0}^{3}(\sin x_i)\,\mathrm{e}^{-x_i} = \sum_{i=0}^{3}\mathrm{e}^{-x_i}(\sin x_i) \doteq 8{,}57, \qquad \sum_{i=0}^{3}(\sin x_i)^2 \doteq 3{,}07.$$

Zbývají dvě pravé strany:

$$\sum_{i=0}^{3} f_i\,\mathrm{e}^{-x_i} \doteq 87{,}38, \qquad \sum_{i=0}^{3} f_i(\sin x_i) \doteq -4{,}68.$$

Po dosazení již dostaneme soustavu

$$62{,}14c_1^* + 8{,}57c_2^* = 87{,}38,$$

$$\underline{8{,}57c_1^* + 3{,}07c_2^* = -4{,}68.}$$

Po jejím vyřešení dostáváme aproximační funkci

$$\varphi(x) = c_1^*\,\mathrm{e}^{-x} + c_2^*\sin x \approx 1{,}95\,\mathrm{e}^{-x} + 3{,}91\sin x.$$

□