Písemka LS-2013 **Zk–$\mathbb{F}$**

3. června 2013

KMA-MAT2/MT2

VZOR 1/4

PÍSEMKA JE ZAMÝŠLENA JEN S OFICIÁLNÍM TAHÁKEM!

1. Vypočtěte derivaci funkce $f : y = \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \sqrt{1 + \sin x}$ a určete $D(f)$ a $D(f')$.
2. Vypočtěte $\displaystyle\int (3x - 1) \cos x \,\mathrm{d}x$.
3. Vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $f : y = \dfrac{1}{2}(x + 1)$, $g : y = 2x - 1$ a $h : y = -x + 5$.
4. Vyřešte $y' = \dfrac{y^2}{t^2}$.
5. Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$. (Nezapomeňte určit definiční obor.)
6. Aproximujte následující data

i	0	1	2
x_i	-1	1	3
f_i	1	-1	1

parabolou $\varphi(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ metodou nejmenších čtverců.

(1) $D(f)$: $\cos x \neq 0 \ \wedge \ 1 + \sin x \geq 0$; $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \wedge \ x \in \mathbb{R}$ $\Big\}$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$f' : y = \underbrace{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'}_{\operatorname{tg} x} \cdot \sqrt{1+\sin x} + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \cdot \left(\sqrt{1+\sin x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sqrt{1+\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{2\sqrt{1+\sin x}} \cdot \cos x =$$

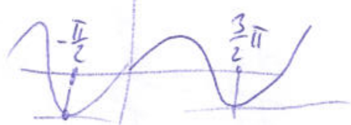
$$= \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{2\sqrt{1+\sin x}} = \frac{1}{2} \frac{2(1+\sin x) + \sin x \cos^2 x}{\cos^2 x \sqrt{1+\sin x}}$$

$D(f')$: $\underbrace{1+\sin x \geq 0 \ \wedge \ \cos x \neq 0}_{D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}} \ \wedge \ 2 \cdot \sqrt{1+\sin x} \neq 0$

$1 + \sin x \neq 0$

$\sin x \neq -1$

$x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



$D(f') = D(f) \setminus \{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, neboť

$\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \subset \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(2) $\int (3x-1)\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = 3x-1, & v' = \cos x \\ u' = 3, & v = \sin x \end{bmatrix} = (3x-1)\sin x - 3\int \sin x\,dx =$

$= (3x-1)\sin x + 3\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}$

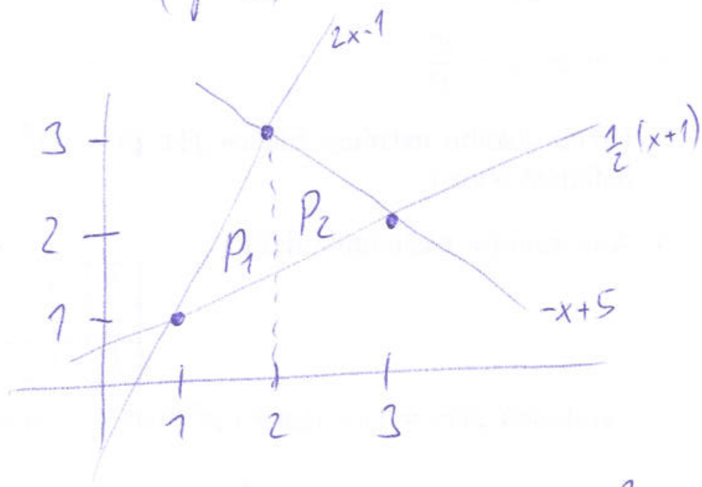
(3) Průsečíky:

$\frac{1}{2}(x+1) = 2x-1 \;|\cdot 2$
$x+1 = 4x-2$
$-3x = -3$
$x = 1$
$(y = 1)$

$\frac{1}{2}(x+1) = -x+5 \;|\cdot 2$
$x+1 = -2x+10$
$3x = 9$
$x = 3$
$(y = 2)$

$2x-1 = -x+5$
$3x = 6$
$x = 2$
$(y = 3)$

$P = P_1 + P_2$



$P_1 = \int_1^2 \left[(2x-1) - \frac{1}{2}(x+1)\right]dx =$

$= \int_1^2 \left(2x - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)dx = \frac{3}{2}\int_1^2 (x-1)\,dx =$

$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{4}{2}-2\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right)\right] =$

$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$P_2 = \int_2^3 \left[(-x+5) - \frac{1}{2}(x+1)\right]dx = \int_2^3 \left[-\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\right]dx = \left[-\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x\right]_2^3 =$

$= \left(-\frac{3}{4}\cdot 9 + \frac{9}{2}\cdot 3\right) - \left(-\frac{3}{4}4 + \frac{9}{2}2\right) = \frac{54-27}{4} - (6) = \frac{27}{4} - \frac{24}{4} = \frac{3}{4}$

$P = P_1 + P_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\;[j^2]$

(4) $y' = \frac{y^2}{t^2}$ – separovatelná DR, $t \neq 0$

$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{t^2} \;|\cdot dt, \;: y^2 \neq 0 \qquad y \equiv 0, t \neq 0$, tedy $\left.\begin{matrix} y \equiv 0, t < 0 \\ y \equiv 0, t > 0 \end{matrix}\right\}$ jsou dvě řešení

$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dt}{t^2}, \quad \frac{-1}{y} = \frac{-1}{t} + C_1^{\in\mathbb{R}} \;|\cdot(-1)$

$\frac{1}{y} = \frac{1}{t} + C_2 \left(= \frac{1 + C_2 t}{t}\right)$

$y = \frac{t}{1+Ct}$

$\begin{bmatrix} y = \frac{t}{1+Ct}, & (1+Ct) \neq 0 \\ y \equiv 0, & t \neq 0 \end{bmatrix}$

Písemka LS-2013	Zk–$\mathbb{F}$

3. června 2013

KMA-MAT2/MT2

VZOR (3/4)

PÍSEMKA JE ZAMÝŠLENA JEN S OFICIÁLNÍM TAHÁKEM!

1. Vypočtěte derivaci funkce $f : y = \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \sqrt{1 + \sin x}$ a určete $D(f)$ a $D(f')$.

2. Vypočtěte $\displaystyle\int (3x - 1) \cos x \, dx$.

3. Vypočtěte obsah konečného rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $f : y = \frac{1}{2}(x + 1)$, $g : y = 2x - 1$ a $h : y = -x + 5$.

4. Vyřešte $y' = \dfrac{y^2}{t^2}$.

5. Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$. (Nezapomeňte určit definiční obor.)

6. Aproximujte následující data

i	0	1	2
x_i	-1	1	3
f_i	1	-1	1

parabolou $\varphi(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ metodou nejmenších čtverců.

5) $D(f) = \mathbb{R}^2$, $f'_x = 3 \cdot 2 \cdot x^2 + 9y^2 + 2 \cdot 15 \cdot x + 0 = 6x^2 + 9y^2 + 30x$

$f'_x = 3(2x^2 + 3y^2 + 10x)$

$f'_y = 0 + 18xy + 0 + 54y = 18(xy + 3y) = 18y(x + 3)$

Stacionární body: $f'_x = 0$, $6x^2 + 9y^2 + 30x = 0$

$f'_y = 0$, $18y(x+3) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} y = 0 \\ x = -3 \end{array}\right.$

$y = 0 \Rightarrow 6x^2 + 9 \cdot 0^2 + 30x = 0$, $6x(x+5) = 0 \Rightarrow x = \left\langle \begin{array}{l} 0 \\ -5 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} A[0,0] \\ B[-5,0] \end{array}$

$x = -3 \Rightarrow 6 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot y^2 + 30(-3) = 0$, $9y^2 - 36 = 0$, $9(y^2 - 4) = 0 \Rightarrow y = \left\langle \begin{array}{l} -2 \\ 2 \end{array}\right.$

$C[-3,-2]$, $D[-3,2]$

$f''_{xx} = 12x + 30$

$f''_{xy} = 18y$

$f''_{yx} = 18y$

$f''_{yy} = 18x + 54$

$D_2 = \begin{vmatrix} 12x+30 & 18y \\ 18y & 18x+54 \end{vmatrix}$

Stac.b.	$D_1 = f''_{xx}()$	D_2	Výsledek
$A[0,0]$	30	$\begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 54 \end{vmatrix} > 0$	Ostré L. Min
$B[-5,0]$	-30	$\begin{vmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -36 \end{vmatrix} > 0$	Ostré L. Max
$C[-3,-2]$	-6	$\begin{vmatrix} -6 & -36 \\ -36 & 0 \end{vmatrix} < 0$	Nemá L. Extr.
$D[-3,2]$	-6	$\begin{vmatrix} -6 & 36 \\ 36 & 0 \end{vmatrix} < 0$	Nemá L. Extr.

6

i	0	1	2	Σ
x_i	-1	1	3	3
f_i	1	-1	1	1
x_i^2	1	1	9	11
x_i^3	-1	1	27	27
x_i^4	1	1	81	$\cancel{84}$ 83
$f_i x_i$	-1	-1	3	1
$f_i x_i^2$	1	-1	9	9

$\varphi(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$

$$\begin{pmatrix} \Sigma 1 & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma f_i \\ \Sigma f_i x_i \\ \Sigma f_i x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 27 & 1 \\ 11 & 27 & \cancel{84}\,3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 11 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ -1 & 15 & \cancel{40}\,39 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 15 & \cancel{40}\,39 & 5 \end{array}\right) \sim$$

2.ř. − 1.ř.
3.ř. − 4·1.ř.

2.ř. /8

1.ř. − 3·2.ř.
3.ř. − 15·2.ř.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \cancel{10}\,9 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \cancel{35}\,32 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 9 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

1.ř. + 3·3.ř.

1.ř. /16

$2c_3 = 1 \Rightarrow \underline{c_3 = \frac{1}{2}}$

$c_2 + 2c_3 = 0$

$\Rightarrow c_2 + 1 = 0$

$\underline{c_2 = -1}$

$-c_1 + 9c_3 = 5$

$-c_1 + 9 \cdot \frac{1}{2} = 5$

$-c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$

$$\underline{\underline{\varphi(x) = -\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2}}$$