

Texty k přednáškám z MMAN3:

4. Funkce a zobrazení v euklidovských prostorech

1. července 2008

1 Funkce v $\mathbb{R}^n$

Definice 1 Necht' $n \in \mathbb{N}$ a $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$. Reálnou funkcí v $\mathbb{R}^n$ (reálnou funkcí n -proměnných) rozumíme zobrazení $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Množinu D nazýváme definiční obor funkce f (často značíme jako $D(f)$).

Poznámka 1 Funkce n reálných proměnných tedy přiřazuje každé uspořádané n -tici $(x_1, \dots, x_n) \in D(f)$ reálné číslo $f((x_1, \dots, x_n))$, které budeme zjednodušeně zapisovat symbolem $f(x_1, \dots, x_n)$. Argumentům $x_1, \dots, x_n$ říkáme nezávisle proměnné. Zapisujeme

$$f : \quad y = f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{nebo} \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n),$$

případně pro $n = 2$ ($n = 3$)

$$z = f(x, y), \quad (w = f(x, y, z)).$$

Příklad 1 Obsah obdélníku o stranách a, b je roven

$$S = ab.$$

Výraz S lze chápat jako funkci dvou nezávisle proměnných a, b , $a > 0$, $b > 0$, tedy $D(S) = (0, \infty) \times (0, \infty)$ (ikdyž výraz S má smysl i pro nekladné hodnoty a, b).

Poznámka 2 Je-li funkce f dána předpisem a není určen její definiční obor, pak definičním oborem budeme rozumět množinu všech uspořádaných n -tic, pro které má předpis funkce smysl – nazýváme jej *přirozeným definičním oborem*.

Příklad 2 Definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

je zřejmě množina

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

tedy uzavřený jednotkový kruh (kruh o poloměru 1 se středem v počátku).

1.1 Operace s funkcemi

Podobně jako u funkcí jedné reálné proměnné lze definovat sčítání (odčítání, násobení, dělení). Například jsou-li funkce f, g funkce v $\mathbb{R}^n$ definované na množině $D \subset \mathbb{R}^n$, pak funkci

$$(f + g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)$$

pro každé $(x_1, \dots, x_n) \in D$ nazýváme součtem funkcí f a g .

Podobně lze definovat další pojmy jako funkce shora, zdola omezená na množině, supremum, infimum, maximum, minimum na množině, uspořádání funkcí (tj. $f \leq g$ na D právě tehdy, když $f(x_1, \dots, x_n) \leq g(x_1, \dots, x_n)$ pro každé $(x_1, \dots, x_n) \in D$).

Definice 2 Necht' $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1, g_2, \dots, g_m : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce v $\mathbb{R}^n$ takové, že platí

$$x \in M \implies (g_1(x), \dots, g_m(x)) \in D.$$

Pak složením funkcí f a $g_1, \dots, g_m$ rozumíme funkci $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ (n proměnných) definovanou vztahem

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$$

pro každé $(x_1, \dots, x_n) \in M$. Funkci f nazýváme vnější funkcí zobrazení F a funkce $g_1, \dots, g_m$ nazýváme vnitřní funkce zobrazení F .

Příklad 3 Necht'

$$\begin{aligned} f(u, v) &= u^2 + v^3 && \text{pro každé } (u, v) \in \mathbb{R}^2, \\ g_1(x, y, z) &= xyz && \text{pro každé } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ g_2(x, y, z) &= x + y && \text{pro každé } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Pak funkce F z definice 2 má předpis

$$F(x, y, z) = x^2 y^2 z^2 + (x + y)^3 \quad \text{pro každé } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1.2 Elementární funkce v $\mathbb{R}^n$

Elementární funkce v $\mathbb{R}^n$ jsou funkce vzniklé pomocí algebraických operací (tj. sčítání, násobení, odčítání a dělení) a operace skládání (viz definice 2) z těchto funkcí:

1. konstantní funkce v $\mathbb{R}^n$,
2. elementární funkce jedné proměnné,
3. projekce v $\mathbb{R}^n$.

Definice 3 Pro každé $i = 1, \dots, n$ rozumíme i -tou projekcí v $\mathbb{R}^n$ funkci $\Pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$\Pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i \quad \text{pro každé } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Zřejmě z konstantních funkcí a projekcí můžeme pomocí operace násobení vytvořit funkce mající předpis

$$g(x_1, \dots, x_n) = cx_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

kde $c \in \mathbb{R}$, $k_i \in \mathbb{N}_0$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Funkci g budeme nazývat jednočlenem stupně $k_1 + \dots + k_n = m$. Součet libovolného (konečného) počtu jednočlenů stupně nejvýše m nazýváme *polynomem v $\mathbb{R}^n$ stupně m* . Například

$$P(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2x_3^5 + 4x_1x_2^2x_3 - 2x_1x_2$$

je polynom stupně 8.

Definice 4 Polynom P v $\mathbb{R}^n$ nazveme homogenní polynom stupně k , jestliže platí

$$P(tx_1, \dots, tx_n) = t^k P(x_1, \dots, x_n)$$

pro každé $t \in \mathbb{R}$ a $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Příklad 4 Polynom

$$P(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2x_3^5 + 2x_1^8 - 3x_1x_2^7 + 4x_1x_2x_3^6$$

je homogenní polynom stupně 8. Stačí ověřit, že je splněna podmínka z definice 4. Všimněte si, že všechny jednočleny, ze kterých je tento polynom sestaven jsou stupně 8. To není náhoda. Homogenní polynomy jsou součtem jednočlenů o stejném stupni.

Poznámka 3 Chápeme-li prvky z $\mathbb{R}^n$ jako vektory, pak homogennímu polynomu stupně k říkáme *forma k -tého stupně*. Homogenní polynom prvního stupně (formou prvního stupně; lineární formou) v $\mathbb{R}^n$ je zobrazení definované předpisem

$$l(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

pro každé $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, kde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Homogenním polynomem druhého stupně (formou druhého stupně; kvadratickou formou) v $\mathbb{R}^n$ je zobrazení definované předpisem

$$k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

pro každé $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i, j = 1, \dots, n$.

Příklad 5 Funkce

$$k(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_4 - x_3x_4$$

je kvadratická forma v $\mathbb{R}^4$.

Definice 5 Grafem funkce $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ budeme nazývat množinu

$$G(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in D(f) \wedge x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Definice 6 Necht' $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Hladinou funkce f příslušné k číslu c (c -hladinou funkce f) nazýváme množinu

$$H_c = \{(x_1, \dots, x_n) \in D : f(x_1, \dots, x_n) = c\}.$$

1.3 Zobrazení euklidovských prostorů

Definice 7 Necht' $m, n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Zobrazení $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazveme m -vektorovou funkcí n -proměnných.

Poznámka 4 Funkce f tedy každému vektoru $(x_1, \dots, x_n) \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$ přiřazuje bod (vektor) $(y_1, \dots, y_m)$. Protože každá složka y_i je určena jednoznačně uspořádanou n -ticí $(x_1, \dots, x_n)$, můžeme psát

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad \text{pro každé } i = 1, \dots, m,$$

Tedy zobrazení f je určeno jednoznačně m -ticí $f_1, f_2, \dots, f_m$ funkcí v $\mathbb{R}^n$, budeme tento fakt označovat takto

$$f = (f_1, \dots, f_m).$$

Dokažte, že platí

$$f_i = \Pi_i \circ f$$

pro každé $i = 1, \dots, m$, kde $\Pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je i -tá projekce.

2 Spojitá zobrazení

Nyní budeme pracovat s množinou $\mathbb{R}^n$ vybavenou euklidovskou metrikou

$$\rho_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

pro $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ (tedy s takzvaným euklidovským prostorem $\mathbb{R}^n$). Všechny následující úvahy se jednoduše dají zobecnit pro zobrazení libovolných metrických prostorů.

Definice 8 Necht' $m, n \in \mathbb{N}$, $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Řekneme, že f je spojitá zobrazení v bodě $a \in D$, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in D$ platí

$$\rho_n(x, a) < \delta \quad \implies \quad \rho_m(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Řekneme, že zobrazení f je spojitá, jestliže je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Poznámka 5 Uvažujeme-li množiny $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ s euklidovskými normami (označíme je $\|\cdot\|_n$, $\|\cdot\|_m$), lze implikaci v definici 7 napsat jako

$$\|x - a\|_n < \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_m < \epsilon.$$

Poznámka 6 (a) Je-li a izolovaný bod definičního oboru zobrazení f , pak je f spojitý v a .

(b) Necht' $a \in M \subset D$. Je-li f spojitý v bodě a , pak $f|_M$ je také spojitý v bodě a . Pozor, neplatí obráceně! Nakreslete si obrázek.

Věta 1 Necht' $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in D$. Jestliže existuje $k \geq 0$ takové, že pro každé $x \in D$ platí

$$\rho_m(f(x), f(a)) \leq k\rho_n(x, a),$$

pak f je spojitý zobrazení v bodě a .

Důkaz. Vezmeme $\epsilon > 0$ libovolné a položíme $\delta = \epsilon/k$. Pak pro každé $x \in D$ takové, že $\rho_n(x, a) < \delta$ platí

$$\rho_m(f(x), f(a)) \leq k\rho_n(x, a) < k\delta = k \frac{\epsilon}{k} = \epsilon.$$

Tím je věta dokázána. □

Poznámka 7 Konstanta k z věty 1 tedy nezávisí na výběru x .

Příklad 6 Dokažte pomocí věty 1, že platí:

(1) Každé konstantní zobrazení je spojitý.

Řešení: Necht' f je konstantní zobrazení, tj. existuje $c \in \mathbb{R}^m$ tak, že $f(x) = c$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$. Vezmeme libovolný bod $a \in \mathbb{R}^n$. Platí

$$\rho_m(f(x), f(a)) = \rho_m(c, c) = 0 \leq k\rho_n(x, a)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, kde k může být libovolná kladná konstanta.

(2) Projekce v $\mathbb{R}^n$ jsou spojité funkce.

Řešení: Uvažujme projekci $\Pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i \in \{1, \dots, n\}$ a $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Pak pro každé $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned} \rho_1(\Pi_i(x), \Pi_i(a)) &= \rho_1(x_i, a_i) = |x_i - a_i| \\ &= \sqrt{(x_i - a_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2} = \rho_n(x, a), \end{aligned}$$

tedy lze položit $k = 1$.

(3) Je dána funkce $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{pro } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} - 0 \right| &= \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}\sqrt{z^2}}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho_3((x, y, z), (0, 0, 0)) \end{aligned}$$

pro $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. V tomto případě lze opět položit $k = 1$ a použít větu 1.

(4) Je dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ukážeme, že tato funkce není spojitá v bodě $(0, 0)$. Uvažujme restrikcí funkce f na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\},$$

pro přehlednost označíme $g = f|_M$. Pak zřejmě

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } (x, y) \in M \setminus (0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Je vidět, že funkce g není spojitá v $(0, 0)$, tedy podle poznámky 6(a) nemůže být spojitá ani funkce f .

Věta 2 (Charakterizace spojitosti zobrazení v bodě pomocí konvergentních posloupností) Necht' $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in D$. Zobrazení f je spojitě v bodě a právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_k\} \subset D$ platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a).$$

Důkaz. Necht' f je spojitě zobrazení v bodě $a \in D(f)$ a $\{x_k\} \subset D(f)$ je posloupnost bodů taková, že $x_k \rightarrow a$ pro $k \rightarrow \infty$, tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_n(x_k, a) = 0. \quad (1)$$

Dokážeme, že $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$. Vezmeme libovolné $\epsilon > 0$ (k němu se budeme snažit najít $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ bude platit $\rho_m(f(x_k), f(a)) < \epsilon$). Ze spojitosti funkce f plyne existence $\delta > 0$ takového, že pro každé $x \in D$ platí

$$\rho_n(x, a) < \delta \quad \implies \quad \rho_m(f(x), f(a)) < \epsilon. \quad (2)$$

Z (1) plyne, že k tomuto δ lze najít $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$k \geq k_0 \implies \rho_n(x_k, a) < \delta.$$

Z implikace (2) tedy dostáváme, že pro $k \geq k_0$ platí

$$\rho_m(f(x_k), f(a)) < \epsilon.$$

Tím jsme dokázali, že $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$.

Opačnou implikaci dokážeme sporem. Předpokládejme, že f není spojitá v bodě $a \in D$. Pak existuje $\epsilon_0 > 0$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $x_k \in D$ tak, že

$$\rho_n(x_k, a) < \frac{1}{k} \quad \text{a zároveň} \quad \rho_m(f(x_k), f(a)) \geq \epsilon_0.$$

Dostáváme tak posloupnost $\{x_k\} \subset D$ bodů takovou, že

$$x_k \rightarrow a \quad \text{pro } k \rightarrow \infty \quad \text{a zároveň} \quad f(x_k) \not\rightarrow f(a) \quad \text{pro } k \rightarrow \infty.$$

□

Věta 3 *Necht' $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $a \in D$. Jsou-li f a g spojité v bodě a , pak jsou v tomto bodě spojitě i funkce*

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \text{ (jestliže } g(a) \neq 0 \text{)}.$$

Věta 4 *(o spojitosti složeného zobrazení) Necht' $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, $m, n, k \in \mathbb{N}$ a $a \in D$ takové, že $f(a) \in E$. Jestliže f je spojitá v bodě a a g je spojitá v bodě $f(a)$, pak $f \circ g$ je spojitá v bodě a .*

Věta 5 *Necht' $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Zobrazení f je spojitě právě tehdy, když f_i jsou spojitě pro každé $i = 1, \dots, m$.*

Příklad 7 *Funkce*

$$f(x, y) = (x^2y + xy, 3xy - 3x)$$

je spojitá, protože funkce $f_1(x, y) = x^2y + xy$ a $f_2(x, y) = 3xy - 3x$ jsou spojitě.

2.1 Spojitost na kompaktní množině

Definice 9 Množinu $M \subset (X, \rho)$ (kde (X, ρ) je metrický prostor) nazýváme kompaktní, jestliže z libovolné posloupnosti bodů z M lze vybrat konvergentní podposloupnost v M (tzn. limita leží v M).

Věta 6 (Bolzano–Weierstrass) *Z každé omezené posloupnosti v $\mathbb{R}^n$ lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Důsledek 1 (důležitý!) *Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.*

Věta 7 *Necht' $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset D$. Jestliže f je spojitě zobrazení a množina A kompaktní, pak také $f(A)$ je kompaktní.*

Důsledek 2 *Jsou-li splněny předpoklady předchozí věty, pak f nabývá na množině A maxima i minima.*

2.2 Spojitost na souvislé množině

Definice 10 Řekneme, že body $a, b \in A \subset \mathbb{R}^n$ lze spojit cestou (křivkou) ležící v A , jestliže existuje spojitě zobrazení $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow A$ takové, že

$$\gamma(\alpha) = a \quad \wedge \quad \gamma(\beta) = b.$$

Definice 11 Neprázdná množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá souvislá, jestliže libovolné její dva body lze spojit křivkou ležící v A .

Poznámka 8 Pro $A \subset \mathbb{R}$ platí ekvivalence

$$A \text{ je souvislá} \iff A \text{ je interval.}$$

Věta 8 Necht' $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset D$. Je-li f spojitě zobrazení a množina A je souvislá, pak také $f(A)$ je souvislá množina.

Příklad 8 Následující množiny jsou souvislé v $\mathbb{R}^n$. Ověřte!

- (1) Pro $a, b \in \mathbb{R}^n$ definujeme úsečku

$$\overline{ab} = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \in \mathbb{R}^n : \lambda \in [0, 1]\}.$$

- (2) Lomenou čarou s krajními body $a, b \in \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu

$$L = \overline{aa_1} \cup \overline{a_1a_2} \cup \dots \cup \overline{a_mb},$$

kde $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$.

2.3 Limita zobrazení

Definice 12 Necht' $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod množiny D , $b \in \mathbb{R}^m$. Řekneme, že f má v bodě a limitu b , jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in D$ platí

$$0 < \rho_n(x, a) < \delta \implies \rho_m(f(x), b) < \epsilon.$$

Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Poznámka 9 Uvažujeme-li množiny $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ s euklidovskými normami (označíme je $\|\cdot\|_n$, $\|\cdot\|_m$), lze implikaci v definici 12 napsat jako

$$\|x - a\|_n < \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_m < \epsilon.$$

Viz poznámku 5.

Definice 13 Necht' $M \subset D$. Má-li restrikce $f|_M$ v bodě a limitu b , říkáme, že b je limita zobrazení f v bodě a vzhledem k množině M a píšeme

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = b.$$

Věta 9 Zobrazení f může mít v bodě a nejvýše jednu limitu.

Věta 10 Necht' $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in D$ je hromadný bod množiny D . Pak funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Věta 11 Necht' existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Je-li $M \subset D$ taková, že a je hromadným bodem množiny M , pak platí

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = b.$$

Důsledek 3 Jestliže existují $M, N \subset D$ takové, že a je hromadným bodem obou množin a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in N}} f(x),$$

pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ neexistuje.

Věta 12 Necht' $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $a \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod množiny D . Pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D \setminus \{a\}$ platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = b.$$

Věta 13 Necht' f a g jsou reálné funkce v $\mathbb{R}^n$, existují limity

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \in \mathbb{R}$$

a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = bc,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha b,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad (\text{pokud } c \neq 0).$$

Věta 14 (limita složeného zobrazení) Necht' $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, $m, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in E$. Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a funkce g je v bodě b spojitá, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)).$$

Věta 15 (o třech limitách) Necht' $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod množiny D a existují limity

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Jestliže existuje prstencové okolí $P(a)$ bodu a tak, že

$$x \in P(a) \cap D \iff f(x) \leq g(x)$$

pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Věta 16 Necht' $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod množiny D . Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existuje} \iff \text{existuje } \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) \text{ pro každé } i = 1, \dots, m.$$

Pokud limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \lim_{x \rightarrow a} f_2(x), \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_m(x)).$$

Poznámka 10 Uvažujme $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Necht' $\Delta > 0$. Označíme

$$A = P(a, \Delta) = (a - \Delta, a + \Delta) \setminus \{a\},$$

$$B = P(b, \Delta) = (b - \Delta, b + \Delta) \setminus \{b\},$$

$$M = A \times B.$$

Předpokládejme, že lze vzít takové Δ , pro které platí

$$M \subset D.$$

Lze pak definovat funkce $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ takto

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \quad \text{pro každé } x \in A,$$

$$\psi(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \quad \text{pro každé } y \in B.$$

Dále je možné uvažovat limity

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y))$$

a

$$\lim_{y \rightarrow b} \psi(y) = \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)).$$

Tyto limity nazýváme opakované nebo dvojnásobné limity. Limitě

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in M}} f(x, y)$$

říkáme dvojná limita. Důvod? Dvojnásobná limita jsou vlastně do sebe vnořené dvě jednoduché limity funkcí jedné proměnné (s parametrem y nebo x) – takže opakovaně provedeme dva limitní přechody. Tedy pouze pojmy z prvního semestru. Ovšem dvojná limita je již limitou v $\mathbb{R}^2$, k jejíž definici je už potřeba mít k dispozici metriku na této množině – což je učivo z kapitoly *Metrické prostory*.

⁰Tato definice platí obecně, tzn. nejen pro náš konkrétní výběr množiny M

Věta 17 *Existuje-li dvojná limita*

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in M}} f(x,y)$$

a pro každé pevné $x \in A$ (resp. $y \in B$) jednoduchá limita

$$\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) = \varphi(x) \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = \psi(y)),$$

pak existuje i dvojnásobná limita

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)) \quad (\text{resp. } \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)))$$

a platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in M}} f(x,y) \\ \left(\text{resp. } \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in M}} f(x,y) \right). \end{aligned}$$

Důkaz. Necht' $\epsilon > 0$ je libovolné. Označíme

$$q = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in M}} f(x,y).$$

Pak existuje $\delta > 0$ (můžeme předpokládat, že $0 < \delta < \Delta$) tak, že pro každé $(x,y) \in M$ platí

$$0 < |x - a| < \delta \quad \wedge \quad 0 < |y - b| < \delta \quad \implies \quad |f(x,y) - q| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zvolme $x' \in \mathbb{R}$ tak, že $0 < |x' - a| < \delta$ (kreslete si obrázek!!!). Pak pro každé $y \in B$ platí

$$0 < |y - b| < \delta \quad \implies \quad |f(x',y) - q| < \frac{\epsilon}{2}$$

a odtud pro $y \rightarrow b$ dostáváme, že

$$|\varphi(x') - q| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

To ale můžeme provést s libovolným x' , pro které $0 < |x' - a| < \delta$. Tedy pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ takové, že $0 < |x - a| < \delta$ platí

$$|\varphi(x) - q| < \epsilon.$$

Což podle definice limity (funkce jedné proměnné) znamená, že

$$q = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x,y).$$

□