Určete (volné) lokální extrémy funkce
$$f(x,y) = xy(4 - x - y).$$

Řešení ① Určíme stacionární body

$$\left\|\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4y - 2xy - y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x - x^2 - 2xy = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\|\begin{array}{ll} y(4 - 2x - y) = 0 & (\mathrm{I}) \\ x(4 - x - 2y) = 0 & (\mathrm{II}) \end{array}\right.$$

Z (I) plyne, že buď $y = 0$ nebo $4 - 2x - y = 0$.

a) $\underline{y = 0}$. Dosazením do (II) dostáváme
$$x(4 - x) = 0$$
Odtud $x = 0 \vee x = 1$. Dostáváme 2 stacionární body
$$a_1 = (0,0),\quad a_2 = (4,0).$$

b) $\underline{4 - 2x - y = 0}$, tzn. $y = 4 - 2x$. Dosazením do (II) dostáváme
$$x(4 - x - 8 + 4x) = 0$$
$$x(+3x - 4) = 0.$$
Odtud $x = 0 \vee x = \frac{4}{3}$. Dostáváme 2 stacionární body
$$a_3 = (0,4),\quad a_4 = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right).$$

② Určíme, zda v bodech $a_1, \dots, a_4$ nabývá funkce f lokálního extrému

Nejprve určíme Hessovu matici funkce f:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

a) $\underline{a_1 = (0,0)}$:

$$\nabla^2 f(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože $\Delta_1 = 0$, nemůžeme rozhodnout podle Sylvesterova kritéria. Podíváme se tedy přímo na tvar $d^2 f(a_1)$:

$$d^2 f(a_1)(\underline{h}) = 8 h_1 h_2 \qquad \forall\, \underline{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Protože pro $\underline{h}^{[1]} = (1,1)$, $\underline{h}^{[2]} = (-1,1)$ platí

$$d^2 f(a_1)(\underline{h}^{[1]}) = 8 > 0 \ \wedge\ d^2 f(a_1)(\underline{h}^{[2]}) = -8 < 0$$

je vidět, že $d^2 f(a_1)$ je indefinitní.

Tedy a_1 není bodem lokálního extrému funkce f.

b) $\underline{a_2 = (4,0)}$:

$$\nabla^2 f(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Opět $\Delta_1 = 0$, proto nemůžeme Sylvesterovo kritérium použít. Podívejme se na tvar $d^2f(a_2)$:

$$d^2f(a_2)(\underline{h}) = -8h_1h_2 - 8h_2^2 \qquad \forall\, \underline{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{V}^2.$$

K určení definitnosti této formy je třeba její předpis trochu upravit:

$$d^2f(a_2)(\underline{h}) = -8h_1h_2 - 8h_2^2 = -8\left(h_1h_2 + h_2^2\right) =$$
$$= -8\left(h_2^2 + h_1h_2 + \tfrac{1}{4}h_1^2 - \tfrac{1}{4}h_1^2\right) = -8\left[\left(h_2 + \tfrac{1}{2}h_1\right)^2 - \tfrac{1}{4}h_1^2\right]$$
$$= 2h_1^2 - 8\left(h_2 + \tfrac{1}{2}h_1\right)^2.$$

Zřejmě je forma indefinitní, ale je třeba to dokázat: Pro $\underline{h}^{[1]} = (2, -1)$, $\underline{h}^{[2]} = (0, 1)$ platí

$$d^2f(a_2)(\underline{h}^{[1]}) = 8 > 0 \quad \text{a} \quad d^2f(a_2)(\underline{h}^{[2]}) = -2 < 0.$$

Tedy ani a_2 není bodem lokálního extrému.

c) $\underline{a_3 = (0, 4)}$:

$$\nabla^2 f(a_3) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože $\Delta_1 = -8 < 0$, $\Delta_2 = -16 < 0$, pak podle Sylvesterova kritéria platí, že $\nabla^2 f(a_3)$ je indefinitní. Je tedy indefinitní i $d^2f(a_3)$ a a_3 tedy opět není bodem lokálního extrému funkce f.

d) $a_4 = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$:

$$\nabla^2 f(a_4) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Protože $\Delta_1 = -\frac{8}{3} < 0$, $\Delta_2 = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} > 0$, plyne ze Sylvesterova kritéria, že $\nabla^2 f(a_4)$ je negativně definitní matice. Tedy $d^2 f(a_4)$ je negativně definitní kvadratická forma, z čehož plyne, že a_4 je bodem ostrého lokálního maxima.

Závěr: Funkce f má jediný lokální extrém, a to v bodě $a_4 = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ nabývá ostrého lokálního maxima $f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27}$

Určete (volné) lokální extrémy funkce [opsáno z Došlá, Došlý Př. 6.5]

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$$

ležící v prvním oktantu, tj. v množině

$$O_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0\}$$

Řešení (1) Určíme stacionární body

Vyřešíme soustavu rovnic:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

v množině O_1.

Platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \ / \cdot 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - y^2 = 0 \quad (I)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{4x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \ / \cdot 4xy^2 \Rightarrow 2y^3 - 4xz^2 = 0 \quad (II)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \ / \cdot yz^2 \Rightarrow 2z^3 - 2y = 0 \quad (III)$$

Z (I) dostáváme $(2x-y)(2x+y) = 0$ tzn

$$y = 2x \quad \vee \quad y = -2x.$$

a) $y = 2x$. Dosazením do (II) a (III) máme

$$16x^3 - 4xz^2 = 0 \ /:4x \Rightarrow 4x^2 - z^2 = 0$$

$$z^3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{z^3}{2}$$

Pak

$$4\left(\frac{z^3}{2}\right)^2 - z^2 = 0$$

$$z^6 - z^2 = 0 \quad /: z^2$$

$$z^4 - 1 = 0$$

Řešení jsou (reálná) $z_{1,2} = \pm 1$. Protože $z > 0$, pak

pouze $z = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$

Dostáváme stacionární bod

$$a_1 = \left(\tfrac{1}{2}, 1, 1\right).$$

b) $\underline{y = -2x}$. Dosazením do (II) a (III) máme

$$\begin{aligned} -16x^3 - 4xz^2 &= 0 \\ z^3 + 2x &= 0 \Rightarrow x = -\frac{z^3}{2} \quad (!) \end{aligned}$$

V okamžiku (!) se již můžeme zastavit a nepočítat dál.

Hledáme totiž bod (x, y, z) taký, že $x > 0 \wedge z > 0$.

To by z (!) ovšem nemohlo nikdy platit.

(2) <u>Určeme, zda je bod a_1 bodem lokálního extrému.</u>

Určeme Hessovu matici funkce f:

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & \frac{y}{2x^2} & 0 \\ \frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

Platí

$$\nabla^2 f(a_1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Použijeme Sylvesterova kriteria k určení definitnosti formy $d^2 f(a_1)$ jejíž je $\nabla^2 f(a_1)$ reprezentantem. Platí

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = 12 - 4 = 8, \quad \Delta_3 = \ldots = 32$$

Protože jsou všechny kladné, ze Sylvesterova kriteria plyne že $D^2 f(a_1)$ je PD matice, z čehož plyne, že $d^2 f(a_1)$ je PD kvadratická forma.

<u>Závěr</u>: Funkce f má v bodě $a_1 = (\frac{1}{2}, 1, 1)$ ostrý lokální extrém, a to ostré lokální minimum.

Určete lokální (vázané) extrémy funkce

$$f(x,y) = xy$$

vzhledem k množině

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 = 2\}.$$

Řešení Označme $g(x,y) = x^2+y^2-2$.

① Určíme hodnost matice

$$\nabla g = (2x, 2y)$$

na M. Ta je nulová právě tehdy, když $x=0 \wedge y=0$. Protože bod $(0,0) \notin M$, pak $h(\nabla g) = 1$; má tedy plnou řádkovou hodnost.

② Stacionární (vázané) extrémy

Definujeme

$$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2+y^2-2).$$

Pak řešíme soustavu

$$\left\|\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0 & (\mathrm{I}) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda y = 0 & (\mathrm{II}) \\ x^2+y^2 = 2 & (\mathrm{III}) \end{array}\right.$$

Z (I) plyne $y = 2\lambda x$ a dosazením do II dostaneme

$$x - 4\lambda^2 x = 0 \Rightarrow x(1-4\lambda^2) = 0$$

Odtud

$$x = 0 \quad \vee \quad \lambda^2 = \frac{1}{4}.$$

a) pokud $x=0$, pak $y=0$ (z $y=2\lambda x$), což je ve sporu s (III) – tato větev výpočtu nevede k řešení

b) $\underline{\lambda^2=\frac{1}{4}}$ Pak máme dvě řešení $\lambda=\pm\frac{1}{2}$.

$\underline{\lambda=\frac{1}{2}}$: Pak $y=2\cdot\frac{1}{2}x=x$ a dosazením do (III) dostáváme

$$2x^2=2$$

a tedy $x=\pm1$. Pak také $y=\pm1$.

Dostáváme dvě řešení

$$a_1=(1,1)\,,\quad \lambda_1=\frac{1}{2},$$
$$a_2=(-1,-1)\,,\quad \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

$\underline{\lambda=-\frac{1}{2}}$: Pak $y=2\cdot(-\frac{1}{2})x=-x$ a dosazením do (III)

dostáváme

$$2x^2=2$$

a tedy $x=\pm1$. Pak také $y=\mp1$.

Dostáváme dvě řešení

$$a_3=(1,-1)\,,\quad \lambda_3=-\frac{1}{2},$$
$$a_4=(-1,1)\,,\quad \lambda_4=-\frac{1}{2}.$$

(3) Určíme, zda jsou body $a_1,\dots,a_4$ body lokálního (vázaného) extrému.

Nejprve určíme Hessovu matici L vzhledem k x,y:

$$\nabla^2L(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}-2\lambda & 1\\ 1 & -2\lambda\end{pmatrix}$$

Nyní určíme zda v bodě a_1 nastal extrém:

$a_1 = (1, 1)$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$:

Určíme „definitnost" $d^2L(a_1, \lambda_1)$ vzhledem k $\underline{h} = (h_1, h_2)$ splňující

$$(\nabla g(a_1), \underline{h}) = 0,$$

což je

$$((2,2), (h_1, h_2)) = 0$$

neboli

$$2h_1 + 2h_2 = 0,$$

$$\Rightarrow h_1 + h_2 = 0.$$

Odtud dostáváme vztah

$$h_2 = -h_1.$$

Definujeme kvadratickou formu

$$\varphi(h_1) = d^2L(a_1, \lambda_1)(h_1, -h_1) =$$

$$= (h_1, -h_1) \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{= \nabla^2 L(a_1, \lambda_1)} \begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix} = -h_1^2 + 2h_1(-h_1) - (-h_1)^2 =$$

$$= -h_1^2 - 2h_1^2 - h_1^2 = -4h_1^2$$

Zřejmě φ je ND KF $\Rightarrow$ a_1 je bodem vázaného ostrého lokálního maxima funkce f vzhledem k M.

$a_2 = (-1,-1)\ ,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}$: Nyní jen zkratkovitě :

(je to stejný postup jako u a_1).

$$(\nabla g(a_2), \underline{h}) = 0 \iff \left((-2,-2), (h_1, h_2) \right) = 0$$

$$\iff h_2 = -h_1 .$$

$$\varphi(h_1) = (h_1, -h_1) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix} = -4h_1^2 \quad ND$$

$\ldots\ a_2\ \ldots\ \underline{\text{max}}$.

$a_3 = (1,-1)\ ,\ \lambda_3 = -\frac{1}{2}$

$$(\nabla g(a_3), \underline{h}) = 0 \iff h_2 = h_1$$

$$\varphi(h_1) = (h_1, h_1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_1 \end{pmatrix} = h_1^2 + 2h_1^2 + h_1^2 = 4h_1^2 \ldots PD$$

$a_3\ \ldots\ \underline{\text{min}}$

$a_4 = (-1,1)\ ,\ \lambda_4 = -\frac{1}{2}$

$$(\nabla g(a_4), \underline{h}) = 0 \iff h_2 = h_1$$

$\varphi(h_1) = 4h_1^2 \quad \ldots PD \quad \Rightarrow a_4\ \ldots\ \underline{\text{min}}$

Určete (vázané) lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = xyz$$

vzhledem k množině

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \wedge x+y+z = 0\}.$$

Řešení: Označme

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 \text{ a } g_2(x,y,z) = x+y+z.$$

① Určíme hodnost matice

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

na množině M. Její hodnost je zřejmě ≥ 1 přičemž rovna 1 by byla pouze v případě, že vektor $(2x, 2y, 2z)$ je násobkem vektoru $(1,1,1)$ tzn. pokud $x=y=z$. Kdyby takový bod (x,x,x) ležel v M muselo by platit

$$x^2+x^2+x^2 = 1 \quad \wedge \quad x+x+x = 0$$

tedy

$$3x^2 = 1 \quad \wedge \quad 3x = 0,$$

což evidentně nemůže nastat. Tedy hodnost je rovna 2.

② Stacionární (vázané) body

Definujeme — místo λ_1, λ_2 budu psát λ, ω – indexy jsou totiž nepřehledné

$$L(x,y,z,\lambda,\omega) = xyz - \lambda(x^2+y^2+z^2-1) - \omega(x+y+z)$$

a budeme hledat stacionární body:

$$\left\|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz - \lambda\cdot 2x - \omega = 0 & \text{(I)} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz - \lambda\cdot 2y - \omega = 0 & \text{(II)} \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = xy - \lambda\cdot 2z - \omega = 0 & \text{(III)} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & \text{(IV)} \\ x + y + z = 0 & \text{(V)} \end{array}\right.$$

Postupovat při řešení můžeme různě. Třeba takto:
Odečteme od sebe rovnice (I) a (II); (II) a (III); (I) a (III), dostaneme

$$\left\|\begin{array}{l} yz - 2\lambda x - \omega - (xz - 2\lambda y - \omega) = 0 \\ xz - 2\lambda y - \omega - (xy - 2\lambda z - \omega) = 0 \\ yz - 2\lambda x - \omega - (xy - 2\lambda z - \omega) = 0 \end{array}\right. \iff \left\|\begin{array}{l} (y-x)z + (-x+y)(+2\lambda) = 0 \\ (z-y)x + (-y+z)(2\lambda) = 0 \\ (z-x)y + (-x+z)\cdot(2\lambda) = 0 \end{array}\right.$$

Odkud po vytknutí dostáváme:

$$\left\|\begin{array}{ll} (y-x)(z+2\lambda) = 0 & (\mathrm{I}_a) \\ (z-y)(x+2\lambda) = 0 & (\mathrm{II}_a) \\ (z-x)(y+2\lambda) = 0 & (\mathrm{III}_a) \end{array}\right. \quad + \text{(IV)}, \text{(V)}$$

Rozebereme nejdříve rovnici (I_a):

$$y - x = 0 \quad \vee \quad z + 2\lambda = 0.$$

a) $\underline{x = y}$. Pak dosazením do (II_a), (IV) a (V) dostaneme

$$\left\|\begin{array}{ll} (z-x)(x+2\lambda) = 0 & (\mathrm{I}_b) \\ 2x^2 + z^2 = 1 & (\mathrm{II}_b) \\ 2x + z = 0 & \end{array}\right. \Rightarrow \underline{\underline{z = -2x}} \Rightarrow (\mathrm{II}_b) \text{ pak}$$

dostáváme

$$2x^2 + 4x^2 = 1 \quad \text{tedy} \quad 6x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Pak také

$$y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z_{1,2} = \mp\frac{2}{\sqrt{6}},$$

Vrátíme-li se k (I_β) vidíme, že

$$x + 2\lambda = 0, \text{ tj. } \lambda = -\frac{1}{2}x$$

a tedy $\lambda_{1,2} = \mp\frac{1}{2\sqrt{6}}$. Zbývá ω. To určíme např. z (I).

Platí

$$\omega = yz - 2\lambda x.$$

Tedy

$$\omega_{1,2} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right) - 2\left(\mp\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{6}\right) - 2\left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

Dostáváme 2 stacionární body:

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad \omega_1 = -\frac{1}{6}, \\ a_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}}$$

b) $\underline{\underline{z = -2\lambda}}$ Dosazením do zbylých rovnic, tzn. do rovnic (II_a), (III_a), (IV), (V) dostaneme

$$\begin{aligned} (z-y)(x-z) &= 0 \quad (II_c) \\ (z-x)(y-z) &= 0 \quad \ldots \text{ tato rovnice je nadbytečná (stejná jako } (II_c)) \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \quad (IV) \\ x+y+z &= 0 \quad (V) \end{aligned}$$

Z (II_c) máme buď $z - y = 0 \lor x - z = 0$

b_1) $\underline{\underline{z - y = 0}}$ tedy $y = z$. Pak dosazením do (IV) a (V) máme:

$$x^2 + 2y^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad 4y^2 + 2y^2 = 1$$

$$x + 2y = 0 \quad\Rightarrow\quad x = -2y$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{y^2 = \frac{1}{6}}}$$

Pak $y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt6}$, $z_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt6}$, $x_{1,2} = \mp\frac{2}{\sqrt6}$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} z_{1,2} = \mp\frac{1}{2\sqrt6}, \quad \omega_{1,2} = y_{1,2} z_{1,2} - 2\lambda_{1,2} x_{1,2} = -\frac{1}{6}$$

Dostáváme další 2 stacionární body

$$\boxed{\begin{array}{l} a_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}\right), \ \lambda_3 = -\frac{1}{2\sqrt6}, \ \omega_3 = -\frac{1}{6} \\ a_4 = \left(\frac{2}{\sqrt6}, -\frac{1}{\sqrt6}, -\frac{1}{\sqrt6}\right), \ \lambda_4 = \frac{1}{2\sqrt6}, \ \omega_4 = -\frac{1}{6}. \end{array}}$$

b_2) $\underline{x - z = 0}$, tedy $x = z$. Podobným postupem dostáváme 2 stacionární body:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_5 = \left(\frac{1}{\sqrt6}, -\frac{2}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}\right), \ \lambda_5 = -\frac{1}{2\sqrt6}, \ \omega_5 = -\frac{1}{6}, \\ a_6 = \left(-\frac{1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6}, -\frac{1}{\sqrt6}\right), \ \lambda_6 = \frac{1}{2\sqrt6}, \ \omega_6 = -\frac{1}{6}. \end{array}}$$

<u>Poznámka</u>: V kroku b_1) poté, co jsme zjistili, že $y = z$, jsme vzhledem symetrii soustavy rovnic vzhledem k neznámým x, y a z již mohli usoudit jak budou vypadat body a_3, a_4, a_5, a_6 (včetně multiplikátorů).

(3) Určení extrémů

Nejprve určíme Hessovu matici L vzhledem k x, y, z:

$$\nabla^2 L(x,y,z,\lambda,\omega) = \begin{pmatrix} -2\lambda & z & y \\ z & -2\lambda & x \\ y & x & -2\lambda \end{pmatrix}$$

Nyní určíme zda v bodech $a_1, \dots, a_6$ nastal extrém, či ne.

a) $a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$, $\omega_1 = -\frac{1}{6}$

Určíme „definitnost" $d^2L(a_1, \lambda_1, \omega_1)$ pro $\underline{h} = (h_1, h_2, h_3)$ splňující:

$$(\nabla g_1(a_1), \underline{h}) = 0, \quad (\nabla g_2(a_1), \underline{h}) = 0,$$

což je

$$\left(\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}\right), (h_1, h_2, h_3)\right) = 0, \quad ((1,1,1), (h_1, h_2, h_3)) = 0$$

neboli

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{6}} h_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} h_2 - \frac{4}{\sqrt{6}} h_3 &= 0, \\ h_1 + h_2 + h_3 &= 0, \end{aligned}$$

což po úpravě lze přepsat na

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 - 2h_3 &= 0, \\ h_1 + h_2 + h_3 &= 0. \end{aligned}$$

Odtud pak (vyřešením této lineární soustavy):

$$h_3 = 0 \wedge h_2 = -h_1.$$

Definujeme kvadratickou formu

$$\varphi(h_1) = d^2L(a_1, \lambda_1, \omega_1)(h_1, -h_1, 0) =$$

$$= (h_1, -h_1, 0) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{\nabla^2 L(a_1, \lambda_1, \omega_1)} \begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} (h_1, -h_1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(h_1^2 - 4h_1(-h_1) + (-h_1)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(h_1^2 + 4h_1^2 + h_1^2\right) = \frac{6}{\sqrt{6}} h_1^2 = \sqrt{6}\, h_1^2 \; \dots \text{ PD kvadratická forma}$$

Odtud plyne, že bod $a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$
je bodem ostrého lokálního minima vzhledem k M.

b) $a_2 = \quad \ldots$

lok. maxima vzhledem k M

Odpověď: Body a_1, a_3, a_5 jsou body ostrého lokálního minima funkce f vzhledem k množině M.
Body a_2, a_4, a_6 jsou body ostrého lokálního maxima funkce f vzhledem k množině M.
(OVĚŘTE!)

Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

na množině

$$M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \le 1 \}.$$

Řešení: ① Nejprve najdeme stacionární body funkce f ležící v

$$\operatorname{int} M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| < 1 \}.$$

$$\left\| \begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0 & \Rightarrow y = 2x & \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0 & \rightarrow 4x - x = 0 & \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right.$$

Našli jsme jeden stacionární bod a to $(0,0)$, přičemž $(0,0) \in \operatorname{int} M$!

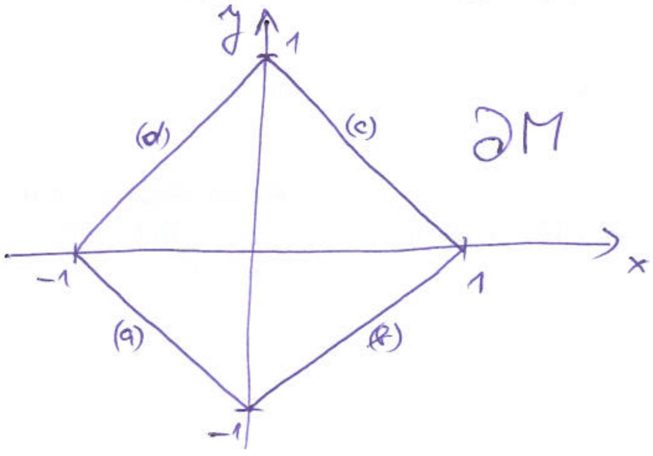
Platí $\quad f(0,0) = \underline{0}.$

② Nyní budeme hledat extrém na ∂M, kde

$$\partial M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| = 1 \}.$$

Zde je potřeba nakreslit si množinu ∂M.

Vzhledem k tomu, že $\operatorname{int} M$ = 1-okolí bodu $(0,0)$ vzhledem k součtové metrice ρ_Σ, pak snadno určíme, že



Množinu ∂M si rozsekáme na úsečky (a), (b), (c), (d), viz obrázek.

(a) Úsečka je zřejmě částí přímky dané rovnicí

$$y = -1 - x$$

a navíc učiníme

$$(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1-x \wedge x \in \langle -1, 0\rangle\}.$$

Definujeme pomocnou funkci

$$g_a(x) = f(x, -1-x) \qquad x \in \langle -1, 0\rangle$$

a budeme hledat body, ve kterých může mít extrém. (To bude buď ve stacionárních bodech v intervalu $(-1, 0)$ nebo v bodech $x=-1 \vee x=0$).

Protože

$$\begin{aligned} g_a(x) &= x^2 - x(-1-x) + (-1-x)^2 = \\ &= x^2 + x + x^2 + 1 + 2x + x^2 = \\ &= 3x^2 + 3x + 1, \end{aligned}$$

pak

$$g_a'(x) = 6x + 3.$$

Pak $g_a'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$. Tedy g_a může mít absolutní extrém na $\langle -1, 0\rangle$ v těchto třech bodech

$$x = -1 \quad \vee \quad x = -\tfrac{1}{2} \quad \vee \quad x = 0,$$

z čehož plyne, že f může nabývat extrému na úsečce (a) v bodech

$$(-1, 0) \quad \vee \quad \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \quad \vee \quad (0, -1).$$

Platí

$$f(-1, 0) = \underline{1}, \quad f\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = \underline{\tfrac{1}{4}}, \quad f(0, -1) = \underline{1}.$$

Podobně postupujeme na dalších částech ∂M.

(b) $=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ y = x-1 \ , \ x\in\langle 0,1\rangle\}$

$\Rightarrow$ definujeme

$$g_b(x) = f(x, x-1) \qquad x\in\langle 0,1\rangle$$

... dostáváme body

$$(0,-1) \quad \vee \quad \left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right) \quad \vee \quad (1,0).$$

Platí

$$f(0,-1) = \underline{1}\ , \ f\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right) = \underline{\tfrac{3}{4}}\ , \ f(1,0) = \underline{1}.$$

(c) $=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ y = -x+1 \ , \ x\in\langle 0,1\rangle\}$

... dostáváme body

$$(0,1) \quad \vee \quad \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) \quad \vee \quad (1,0).$$

Platí

$$f(0,1) = \underline{1}\ , \ f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \underline{\tfrac{1}{4}}\ , \ f(1,0) = \underline{1}.$$

(d) $=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ y = x+1 \ , \ x\in\langle -1,0\rangle\}$

... dostáváme body

$$(-1,0) \quad \vee \quad \left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) \quad \vee \quad (0,1).$$

Platí

$$f(-1,0) = \underline{1}\ , \ f\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \underline{\tfrac{3}{4}}\ , \ f(0,1) = \underline{1}.$$

③ Určíme největší a nejmenší hodnotu funkce f na M:

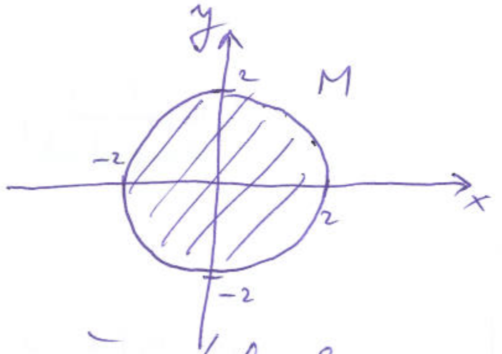
$$\min_{(x,y)\in M} f(x,y) = 0 \ , \ \max_{(x,y)\in M} f(x,y) = 1.$$

Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(3x^2+2y^2)$$

na množině $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\le 4\}$.

Řešení: Nejprve si načrtneme množinu M (pokud to jde):



M je tedy uzavřený kruh.

① Stacionární body v int M

Je třeba poznamenat, že

$$\operatorname{int} M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<4\}.$$

Stacionární body (x,y) funkce f splňují soustavu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$ ~~tedy~~ kde

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-x^2-y^2}(-2x)(3x^2+2y^2)+e^{-x^2-y^2}(6x)=$$

$$=e^{-x^2-y^2}\cdot 2\cdot x\cdot(-3x^2-2y^2+3),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{-x^2-y^2}(-2y)(3x^2+2y^2)+e^{-x^2-y^2}4y=$$

$$=e^{-x^2-y^2}\cdot 2\cdot y\cdot(-3x^2-2y^2+2).$$

Řešíme tuto soustavu:

$$\left\|\begin{array}{ll} x(-3x^2-2y^2+3)=0 & (\mathrm{I}) \\ y(-3x^2-2y^2+2)=0 & (\mathrm{II}) \end{array}\right.$$

Z (I) plyne, že

$x=0$ ∨ $-3x^2-2y^2+3=0 \quad (\mathrm{I_a})$

$(\mathrm{II}) \Rightarrow y(-2y^2+2)=0$

$\Downarrow$

$y=0 \vee -2y^2+2=0$

$y^2-1=0$

$y=1 \vee y=-1$

3 řešení:

$(0,0), (0,1), (0,-1)$

Můžeme ji upravit na

$-3x^2-2y^2=-3$

a dosadit do (II). Pak

$y(-3+2)=0$

tedy $y=0$. Dosazením do $(\mathrm{I_a})$ dostáváme

$-3x^2+3=0$

$x^2-1=0$

a tedy

$x=1 \vee x=-1$

2 řešení:

$(1,0), (-1,0)$

Dohromady máme 5 stacionárních bodů a všechny leží v int M (ve všech tedy může být extrém):

$f(0,0)=0,$

$f(0,1)=e^{-1}\cdot(2)=\frac{2}{e},$

$f(0,-1)=e^{-1}\cdot 2=\frac{2}{e},$

$f(1,0)=e^{-1}\cdot 3=\frac{3}{e},$

$f(-1,0)=e^{-1}\cdot 3=\frac{3}{e}.$

② Stacionární body (vázané) vzhledem k ∂M

Opět je třeba určit

$$\partial M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}.$$

Stacionární body nalezneme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Definujeme

$$g(x,y) = x^2+y^2-4.$$

a) Nejprve určíme ∇g a zjistíme hodnost na ∂M.

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y).$$

Protože

$$(2x,2y)=(0,0) \iff (x,y)=(0,0) \notin \partial M,$$

platí

$$h(\nabla g(x,y)) = 1 \quad \forall (x,y) \in \partial M.$$

b) Definujeme funkci

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

Nalezneme stacionární body:

$$\left\|\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = e^{-x^2-y^2}\cdot 2x(-3x^2-2y^2+3) - 2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = e^{-x^2-y^2}\cdot 2y(-3x^2-2y^2+2) - 2y\lambda = 0 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right.$$

Úpravou dostáváme:

$$
\begin{cases}
2x\left(e^{-x^2-y^2}(-3x^2-2y^2+3)-\lambda\right)=0, & \text{(I)}\\
2y\left(e^{-x^2-y^2}(-3x^2-2y^2+2)-\lambda\right)=0, & \text{(II)}\\
x^2+y^2=4. & \text{(III)}
\end{cases}
$$

Z (I) dostáváme

$$x=0 \quad \vee \quad e^{-(x^2+y^2)}(-3x^2-2y^2+3)=\lambda$$

Dosadíme do (III)

$$y^2=4$$

a dostáváme

$$y=2 \vee y=-2.$$

2 řešení:

$$(0,2),\ (0,-2)$$

Dosadíme do (II) a dostáváme

$$2y\left(e^{-(x^2+y^2)}(-3x^2-2y^2+2)-e^{-(x^2+y^2)}(-3x^2-2y^2+3)\right)=0$$

Pak $y=0$ nebo

$$e^{-(x^2+y^2)}\left[-3x^2-2y^2+2+3x^2+2y^2-3\right]=0.$$

neboli $e^{-x^2+y^2}(-1)=0$, což nikdy neplatí.

Pokud $y=0$ pak dosazením do (III) dostaneme $x=2 \vee x=-2$.

Dostáváme 2 řešení $(2,0)$, $(-2,0)$.

Platí

$$f(0,2)=e^{-2}(2\cdot 4)=\frac{8}{e^2},\quad f(0,-2)=\frac{8}{e^2},$$

$$f(2,0)=e^{-2}(3\cdot 4)=\frac{12}{e^2},\quad f(-2,0)=\frac{12}{e^2}.$$

3. Vybereme největší a nejmenší hodnotu a dostáváme:

$$\max_{(x,y)\in M} f(x,y)=\frac{12}{e^2},\quad \min_{(x,y)\in M} f(x,y)=0.$$