

Matematická analýza pro informatiky I.

1. přednáška

Jan Tomeček
tomecek@inf.upol.cz
<http://aix-slx.upol.cz/~tomecek/index>

Univerzita Palackého v Olomouci

14. února 2011

Úvod k přednášce

- Předměty MA1I, MA2I patří mezi obtížnější předměty ve vašem studiu - je to obtížné na pochopení a je toho hodně. Řešení je učit se soustavně už od první přednášky, snažit se co nejdříve pochopit základní pojmy. Pokud něco není jasné: zeptat se buď na další přednášce, nebo si domluvit konzultaci. Při učení používejte obrázky – bez nich to nejde...
- Zápočet: dvě nebo tři písemky a docházka
- Zkouška: písemná + ústní

Přehled učiva

- 1 Číselné množiny
- 2 Reálné funkce jedné a více proměnných
- 3 Limita posloupnosti v $\mathbb{R}^N$
- 4 Limita funkce
- 5 Spojitost funkce
- 6 Diferenciální počet funkce jedné proměnné
- 7 Diferenciální počet funkcí více proměnných
- 8 Úvod do vektorové analýzy
- 9 Implicitně zadané funkce

Číselné množiny

- množina všech přirozených čísel ($\mathbb{N}$) : 1, 2, 3, ...
- množina všech celých čísel ($\mathbb{Z}$) : ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
- množina všech racionálních čísel ($\mathbb{Q}$) : čísla ve tvaru p/q , kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$
- množina všech reálných čísel ($\mathbb{R}$) : racionální + iracionální čísla
- množina všech komplexních čísel ($\mathbb{C}$) : čísla ve tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, číslo i splňuje $i^2 = -1$ (tedy nejde o reálné číslo)

Platí

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

My se budeme zabývat zejména množinou všech reálných čísel $\mathbb{R}$.
Prezentovaná konstrukce je provedena náznakově a je v ní mnoho různých drobných podvodů.

Množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$

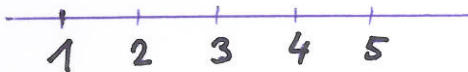
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Na $\mathbb{N}$ jsou definovány operace sčítání (+), násobení ($\cdot$); $(\mathbb{N}, +)$ a $(\mathbb{N}, \cdot)$ tvoří komutativní pologrupy. Na $\mathbb{N}$ jsou definovány relace uspořádání:

$\leq$ uspořádání na $\mathbb{N}$ (tzn. reflexivní, antisymetrická a tranzitivní binární relace na $\mathbb{N}$), které je navíc úplné (tzn. každé dva prvky jsou srovnatelné – trichotomie) $\implies$ prvky jsou seřazeny „jeden za druhým“

$<$ definováno jako $m < n$ právě tehdy když $m \leq n$ a $m \neq n$.

... a relace k nim inverzní – $\geq$, $>$. Dvojice $(\mathbb{N}, \leq)$ je **úplně uspořádaná** množina, mající nejmenší prvek (ale nemá největší prvek). Pro názornost (a další použití) je dobré si ji představovat jako body na přímce takto



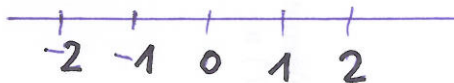
Množina všech celých čísel $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (množina všech rozdílů přirozených čísel)

Na $\mathbb{Z}$ jsou definovány operace sčítání (+), násobení ($\cdot$), odčítání;

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tvoří komutativní okruh. Na $\mathbb{Z}$ jsou definovány relace uspořádání (podobně jako u přirozených čísel): $\leq, <, \geq, >$.

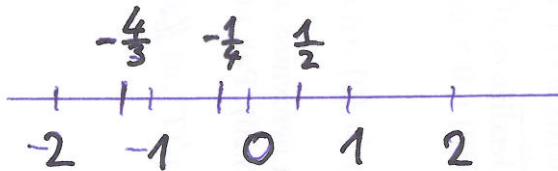
Uspořádaná dvojice $(\mathbb{Z}, \leq)$ je opět **úplně uspořádaná** množina (ale tentokrát nemá ani nejmenší ani největší prvek). Typické grafické znázornění:



Množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$

Na $\mathbb{Q}$ jsou definovány operace sčítání (+), násobení ($\cdot$), odčítání; $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ tvoří komutativní těleso. Na $\mathbb{Q}$ jsou definovány relace uspořádání (podobně jako u celých čísel): $\leq, <, \geq, >$. Opět $(\mathbb{Q}, \leq)$ je **úplně** uspořádaná množina, nemá ani nejmenší ani největší prvek. Typické znázornění:



Uspořádaná množina $(\mathbb{Q}, \leq)$ má jednu zajímavou vlastnost:

Ke každým dvěma racionálním číslům p a r takovým, že $p < r$, existuje racionální číslo q tak, že $p < q < r$.

Důkaz

Stačí dokázat, že $q = (p + r)/2$ (aritmetický průměr čísel p a r) leží mezi p a r .

Tuto vlastnost nemají celá ani přirozená čísla.

Důsledek

Mezi každými dvěma racionálními čísly leží nekonečné množství racionálních čísel (zformulujte pomocí symbolů výrokové logiky!).

Stačí nám racionální čísla?

Odpověď zní **ne**. Uvažujme následující úlohu: Vypočtete úhlopříčku čtverce o délce strany 1. Z Pythagorovy věty plyne, že délka úhlopříčky čtverce, kterou si označíme písmenem u by musela splňovat

$$u^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Dá se docela jednoduše dokázat, že takové číslo **nelze zapsat jako podíl celého a přirozeného čísla** - tedy nemůže jít o racionální číslo. Je tedy **potřeba rozšířit** pojem čísla. Je několik přístupů – naznačena zde bude tzv. **Dedekindova teorie řezů**.

Řezy v racionálních číslech

Definice

Dvojici množin $A, A' \subset \mathbb{Q}$ nazveme řez v $\mathbb{Q}$ jestliže

- $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset,$
- $A \cup A' = \mathbb{Q}, A \cap A' = \emptyset,$
- $\forall x \in A, \forall y \in A' \text{ platí } x < y.$

Množině A říkáme dolní skupina řezu A/A' , množině A' říkáme horní skupina řezu A/A' .

Příklad

- (a) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}, A' = \mathbb{Q} \setminus A,$
- (b) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 2\}, A' = \mathbb{Q} \setminus A,$
- (c) $A = \{x \in \mathbb{Q} : (x \leq 0) \vee (x > 0 \wedge x^2 < 2)\}, A' = \mathbb{Q} \setminus A,$

Poznámka

Dá se dokázat, že pro každý řez A/A' platí právě jedna z možností:

- ❶ množina A nemá největší prvek, A' má nejmenší prvek (řez 1. druhu),*
- ❷ množina A má největší prvek, A' nemá nejmenší prvek (řez 2. druhu),*
- ❸ množina A nemá největší prvek, A' nemá nejmenší prvek (řez 3. druhu).*

Můžeme tedy říct, že každý řez prvního nebo druhého druhu určuje jedno racionální číslo – je to buď nejmenší prvek množiny A' (řez 1. druhu) nebo největší prvek množiny A (řez 2. druhu).

A co řezy třetího druhu? Ty určují “mezeru” v množině racionálních čísel. Tuto „díru“ zaplníme tak, že ji **prohlásíme za** tzv. iracionální číslo – určené tímto řezem třetího druhu. Viz případ (c) z předchozího příkladu (řezem je definováno číslo $\sqrt{2}$).

Definice

Sjednocení množiny racionálních a iracionálních čísel budeme nazývat množinou všech reálných čísel.

Dá se také dokázat, že **žádné “mezery” mezi reálnými čísly už nejsou**. Dále je nutné definovat operace sčítání a násobení na reálných číslech a definovat relace rovnosti a uspořádání v $\mathbb{R}$ ($=$, $\leq$, $<$, atd.) – více na stranách 3 až 9 v [1].

Pro naše další úvahy nám bude stačit intuitivní chápání reálného čísla (podpořené prezentovanou konstrukcí). Reálné číslo si budeme představovat jako bod na přímce.

Z důležitých tvrzení z teorie reálných čísel ještě uveďme následující větu.

Věta

Mezi každými dvěma reálnými čísly leží racionální číslo.

Vzhledem k definici

Definice

Řekneme, že množina A je hustá v množině B jestliže $A \subset B$ a mezi každými dvěma prvky množiny B leží aspoň jeden prvek z množiny A .

můžeme Větu říct (položíme-li $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}$) takto:

Věta

Množina $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$.

Intervaly v $\mathbb{R}$

Připomeňme si některé speciální podmnožiny množiny $\mathbb{R}$ známé ze střední školy – **intervaly**. Uvažujme $a, b \in \mathbb{R}$. Definujeme

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

$$\langle a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

Množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$

Ve zbytku přednášky se zaměříme na jisté speciality množiny $\mathbb{R}$. Podíváme se na ni z několika stran – postupně jako na

- uspořádanou množinu ($\leq$, supremum, infimum, apod.),
- metrický prostor (vzdálenost, okolí bodu),
- topologický prostor (otevřená množina v $\mathbb{R}$, apod.).

Uspořádaná množina $\mathbb{R}$

Definice

Množinu $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ nazveme

- *omezenou zdola*, jestliže $\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \geq K$, (K nazýváme dolní závora)
- *omezenou shora*, jestliže $\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \leq K$, (K nazýváme horní závora)
- *omezenou*, jestliže je omezená shora i zdola.

Poznámka

Množina je omezená, jestliže $\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in M : |x| < K$.

Příklad

Množina $\mathbb{N}$ je omezená zdola a není omezená shora. Množina $\mathbb{Q}$ není omezená shora ani zdola. Množina $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ je omezená. Množina všech záporných celých čísel je omezená shora.

Příklad

Pokud existuje alespoň jedna horní závora dané množiny, pak existuje nekonečně mnoho horních závor (proč?). Podobně je tomu tak i u dolních závor. Na obrázku je znázorněna množina M s dolními závorami L_1 , L_2 a horními závorami K_1 , K_2 , K_3 .



Význačná pro nás bude **nejmenší horní závora** (tzv. **supremum**) a **největší dolní závora** (tzv. **infimum**) množiny, viz následující definice:

Definice

*Uvažujme shora omezenou množinu $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. **Supremem** množiny M rozumíme číslo $G \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$(i) \forall x \in M : G \geq x,$$

$$(ii) \forall \tilde{G} < G \exists x_{\tilde{G}} \in M : x_{\tilde{G}} > \tilde{G}.$$

Supremum množiny M značíme jako $\sup M$.

Poznámka

Jak si představit supremum množiny? Podle podmínky (i) je supremum horní závora množiny M . Podmínka (ii) říká, že vezmeme-li číslo menší (o sebe menší kousek) než supremum, pak toto číslo není horní závorou. Dá se tedy říci, že supremum množiny M je nejmenší možná horní závora této množiny.

Definice

Uvažujme zdola omezenou množinu $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. *Infimem* množiny M rozumíme číslo $g \in \mathbb{R}$ takové, že

$$(i) \forall x \in M : g \leq x,$$

$$(ii) \forall \tilde{g} > g \exists x_{\tilde{g}} \in M : x_{\tilde{g}} > \tilde{g}.$$

Infimum množiny M značíme jako $\inf M$.

Pro úplnost dodejme, že *existence suprema ani infima není samozřejmostí*. Bez důkazu si uveďme tzv. větu o supremu.

Věta

(věta o supremu) *Pro každou neprázdnou shora omezenou množinu existuje právě jedno supremum.*

Podobně platí, že každá neprázdna zdola omezená množina má právě jedno infimum.

Definice

Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Prvek $x \in M$ nazveme

- **největší prvek** množiny M , jestliže $\forall x' \in M : x' \leq x$ (ozn. $x = \max M$),
- **nejmenší prvek** množiny M , jestliže $\forall x' \in M : x' \geq x$ (ozn. $x = \min M$).

Příklad

(a) Uvažujme množinu $M = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Zřejmě $\max M = 1$ a $\min M = 0$.

(b) Uvažujme nyní množinu $M = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$. Zřejmě $\min M = 0$. Ale co $\max M$? Horkým kandidátem by mohlo být číslo 1. Ale $1 \notin M$. Po chvílce zjistíme, že $\max M$ neexistuje (dokažte to!).

Věta

Má-li množina největší prvek, je roven jejímu supremu, tzn.

$\max M = \sup M$. Má-li množina nejmenší prvek, je roven jejímu infimu, tzn. $\min M = \inf M$.

K dalším úvahám je vhodné definovat další dvě “čísla” a to ∞ (nebo-li $+\infty$) a $-\infty$. Definujeme tzv. rozšířenou reálnou osu

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

kde ∞ (tzv. nekonečno) a $-\infty$ **nepatří** do množiny $\mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}^*$ lze přirozeně rozšířit relaci uspořádání $\leq$. Pro každé reálné číslo x definujeme

$$-\infty \leq x \leq \infty$$

(a tedy samozřejmě $-\infty < x < \infty$ - proč?).

Definice

(doplnění definice suprema a infima) Pro shora neomezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ klademe $\sup M = \infty$; pro zdola neomezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ klademe $\inf M = -\infty$. Dále definujeme $\inf \emptyset = \infty$, $\sup \emptyset = -\infty$.

Metrický prostor $\mathbb{R}$

Dalším objektem našeho zájmu (jedním z nejdůležitějších) je pojem **vzdálenosti**. Zde půjde o **vzdálenost dvou reálných čísel**. Jak byste definovali vzdálenost třeba čísel 1 a 6? Třeba $d(1, 6) = 5$. Proč?

Nebo čísel $\sqrt{2}$ a -1 ? Třeba $d(\sqrt{2}, -1) = \sqrt{2} + 1$. Proč?

Obečně, jakým vztahem byste definovali vzdálenost dvou reálných čísel $x, y \in \mathbb{R}$?

Vzdálenost dvou reálných čísel x a y budeme definovat „vzorcem“

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad d_1(x, y) = |x - y|.$$

Pro daná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ budeme číslo $d_1(x, y)$ nazývat vzdálenost čísla x od y .

Metrický prostor $\mathbb{R}$

Dalším objektem našeho zájmu (jedním z nejdůležitějších) je pojem **vzdálenosti**. Zde půjde o **vzdálenost dvou reálných čísel**. Jak byste definovali vzdálenost třeba čísel 1 a 6? Třeba $d(1, 6) = 5$. Proč?

Nebo čísel $\sqrt{2}$ a -1 ? Třeba $d(\sqrt{2}, -1) = \sqrt{2} + 1$. Proč?

Obečně, jakým vztahem byste definovali vzdálenost dvou reálných čísel $x, y \in \mathbb{R}$?

Vzdálenost dvou reálných čísel x a y budeme definovat „vzorcem“

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad d_1(x, y) = |x - y|.$$

Pro daná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ budeme číslo $d_1(x, y)$ nazývat vzdálenost čísla x od y .

Metrický prostor $\mathbb{R}$

Dalším objektem našeho zájmu (jedním z nejdůležitějších) je pojem **vzdálenosti**. Zde půjde o **vzdálenost dvou reálných čísel**. Jak byste definovali vzdálenost třeba čísel 1 a 6? Třeba $d(1, 6) = 5$. Proč?

Nebo čísel $\sqrt{2}$ a -1 ? Třeba $d(\sqrt{2}, -1) = \sqrt{2} + 1$. Proč?

Obečně, jakým vztahem byste definovali vzdálenost dvou reálných čísel $x, y \in \mathbb{R}$?

Vzdálenost dvou reálných čísel x a y budeme definovat „vzorcem“

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad d_1(x, y) = |x - y|.$$

Pro daná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ budeme číslo $d_1(x, y)$ nazývat vzdálenost čísla x od y .

Metrický prostor $\mathbb{R}$

Dalším objektem našeho zájmu (jedním z nejdůležitějších) je pojem **vzdálenosti**. Zde půjde o **vzdálenost dvou reálných čísel**. Jak byste definovali vzdálenost třeba čísel 1 a 6? Třeba $d(1, 6) = 5$. Proč? Nebo čísel $\sqrt{2}$ a -1 ? Třeba $d(\sqrt{2}, -1) = \sqrt{2} + 1$. Proč?

Obečně, jakým vztahem byste definovali vzdálenost dvou reálných čísel $x, y \in \mathbb{R}$?

Vzdálenost dvou reálných čísel x a y budeme definovat „vzorcem“

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad d_1(x, y) = |x - y|.$$

Pro daná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ budeme číslo $d_1(x, y)$ nazývat vzdálenost čísla x od y .

Metrický prostor $\mathbb{R}$

Dalším objektem našeho zájmu (jedním z nejdůležitějších) je pojem **vzdálenosti**. Zde půjde o **vzdálenost dvou reálných čísel**. Jak byste definovali vzdálenost třeba čísel 1 a 6? Třeba $d(1, 6) = 5$. Proč? Nebo čísel $\sqrt{2}$ a -1 ? Třeba $d(\sqrt{2}, -1) = \sqrt{2} + 1$. Proč? Obecně, jakým vztahem byste definovali vzdálenost dvou reálných čísel $x, y \in \mathbb{R}$?

Vzdálenost dvou reálných čísel x a y budeme definovat „vzorcem“

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad d_1(x, y) = |x - y|.$$

Pro daná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ budeme číslo $d_1(x, y)$ nazývat vzdálenost čísla x od y .

Metrický prostor $\mathbb{R}$

Dalším objektem našeho zájmu (jedním z nejdůležitějších) je pojem **vzdálenosti**. Zde půjde o **vzdálenost dvou reálných čísel**. Jak byste definovali vzdálenost třeba čísel 1 a 6? Třeba $d(1, 6) = 5$. Proč? Nebo čísel $\sqrt{2}$ a -1 ? Třeba $d(\sqrt{2}, -1) = \sqrt{2} + 1$. Proč? Obecně, jakým vztahem byste definovali vzdálenost dvou reálných čísel $x, y \in \mathbb{R}$?

Vzdálenost dvou reálných čísel x a y budeme definovat „vzorcem“

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad d_1(x, y) = |x - y|.$$

Pro daná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ budeme číslo $d_1(x, y)$ nazývat vzdálenost čísla x od y .

Zkuste dokázat, že pro $d = d_1$ platí:

- (i) $\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) \geq 0$, (nezápornost)
- (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) = 0 \iff x = y$, (totožnost)
- (iii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) = d(y, x)$, (symetrie)
- (iv) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
(trojúhelníková nerovnost)

Tyto čtyři podmínky jsou tzv. vlastnosti metriky.

Definice

(definice metrického prostoru) Necht' X je neprázdná množina a zobrazení $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastnosti (i) – (iv). **Dvojici (X, d) nazýváme metrický prostor.** Množinu X nazýváme nosič, zobrazení d nazýváme **metrika**.

Poznámka

Z předchozího je jasné, že $(\mathbb{R}, d_1)$ je metrický prostor!

V metrickém prostoru zavádíme pojem **okolí bodu** (bod = prvek metrického prostoru) a redukovaného okolí bodu.

Definice

Nechť (X, d) je metrický prostor. Pro $\delta > 0$ a $a \in X$ rozumíme δ -okolím bodu a množinu

$$\mathcal{U}(a, \delta) = \{x \in X : d(x, a) < \delta\}.$$

Číslo δ nazýváme poloměr. Množinu

$$\mathcal{R}(a, \delta) = \{x \in X : 0 < d(x, a) < \delta\} = \mathcal{U}(a, \delta) \setminus \{a\}$$

nazýváme redukovaným (prstencovým) δ -okolím bodu a .

Poznámka

Speciálně, δ -okolí (resp. redukované/prstencové) reálného čísla a je ve tvaru

$$\mathcal{U}(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta), \quad (\text{resp. } \mathcal{R}(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)).$$

Množina $\mathbb{R}^N$

Symbolem $\mathbb{R}^N$ rozumíme N -tou kartézskou mocninu množiny všech reálných čísel – tedy množinu všech uspořádaných N -tic

$$(x_1, \dots, x_N),$$

kde $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$.

Pro $N = 1, 2, 3$ slouží množina $\mathbb{R}^N$ jako množina souřadnic bodů na přímce, v rovině, v prostoru (trojrozměrném) – nakreslete!

Na $\mathbb{R}^N$ definujeme **sčítání + a násobení skalárem** :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N : x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N),$$
$$\forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, c \in \mathbb{R} : c \cdot x = (cx_1, \dots, cx_N).$$

Dá se dokázat, že

$$(\mathbb{R}^N, +, \cdot)$$

tvorí vektorový prostor dimenze N .

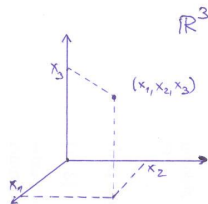
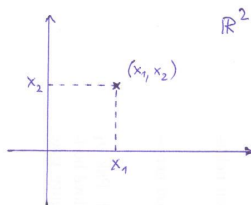
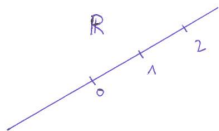
Poznámka

Všimněte si, že platí $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Co z toho pro nás plyne?

Metrické prostory na $\mathbb{R}^N$

Podobně jako v $\mathbb{R}$ se budeme zajímat o **definici vzdálenosti mezi každými dvěma body v $\mathbb{R}^N$** . To bude opět realizováno prostřednictvím nějakého zobrazení $d : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ majícího **vlastnosti metriky** (d budeme opět nazývat metrikou).

Metrik na $\mathbb{R}^N$ můžeme definovat nekonečně mnoho. Zajímat nás budou jen některé. Pro jednoduchost se nejprve omezíme na množinu $\mathbb{R}^2$ – tedy jak definovat vzdálenost každých dvou bodů v rovině.



Existují samozřejmě další možnosti – zde uvedené jsou nejpoužívanější (zkuste podobné vzdálenosti definovat v $\mathbb{R}^3$).

Budeme používat následující metriky v $\mathbb{R}^N$:

Euklidovská metrika

$$d_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}$$

Součtová metrika

$$d_\Sigma(x, y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|$$

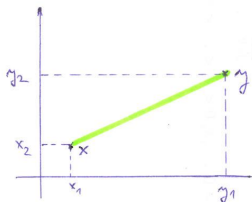
Maximová metrika

$$d_m(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, N\}$$

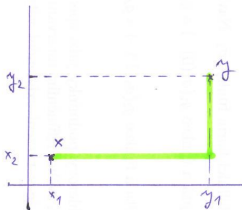
pro $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$.

Ověřte, že tato zobrazení jsou skutečně metriky!

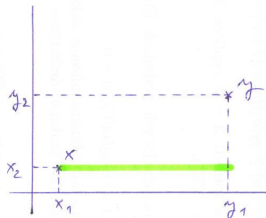
Geometrický význam metrik v $\mathbb{R}^2$:



$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$



$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$



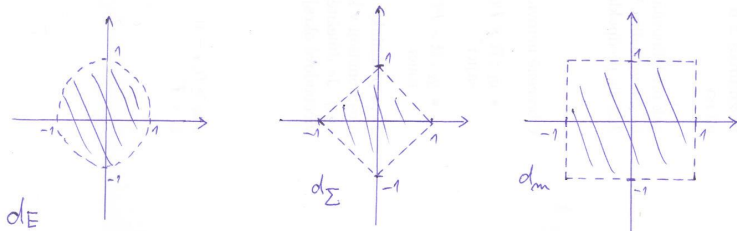
$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

Můžeme tedy říct:

Věta

Uspořádané dvojice $(\mathbb{R}^N, d_E)$, $(\mathbb{R}^N, d_\Sigma)$, $(\mathbb{R}^N, d_m)$ jsou metrické prostory.

Na následujících obrázcích jsou zobrazena δ -okolí bodu $(0, 0)$ v metrických prostorech $(\mathbb{R}^2, d_E)$, $(\mathbb{R}^2, d_\Sigma)$, $(\mathbb{R}^2, d_m)$.



Poznámka

Pokud nebude uvedeno jinak, budeme na $\mathbb{R}^N$ používat pouze euklidovskou metriku.

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Uvažujme neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}^N$ a $a \in \mathbb{R}^N$.

Řekneme, že a je **vnitřní bod množiny** A , jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ tak, že

$$\mathcal{U}(a) \subset A.$$

Množinu všech vnitřních bodů množiny A nazýváme vnitřek množiny A a značíme A° nebo $\text{int}A$.

Řekneme, že a je **vnější bod množiny** A , jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ tak, že

$$\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{R}^N \setminus A.$$

Množinu všech vnějších bodů množiny A nazýváme vnějšek množiny A a značíme A^e nebo $\text{ext}A$.

Řekneme, že a je **hraniční bod množiny** A , jestliže pro každé okolí $\mathcal{U}(a)$ platí

$$\mathcal{U}(a) \cap A \neq \emptyset \quad \text{a zároveň} \quad \mathcal{U}(a) \cap (\mathbb{R}^N \setminus A) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hraničních bodů množiny A nazýváme hranice množiny A a značíme ∂A nebo $\text{h}A$.

Řekneme, že a je **bod uzávěru množiny** A , jestliže pro každé okolí $\mathcal{U}(a)$ platí

$$\mathcal{U}(a) \cap A \neq \emptyset.$$

Množinu všech bodů uzávěru množiny A nazýváme uzávěr množiny A a značíme $\bar{A}$ nebo $\text{cl}A$.

Řekneme, že a je **hromadný bod množiny** A , jestliže pro každé redukované okolí $\mathcal{R}(a)$ platí

$$\mathcal{R}(a) \cap A \neq \emptyset.$$

Řekneme, že bod a je **izolovaný bod množiny** A , jestliže $a \in A$ a existuje redukované okolí $\mathcal{R}(a)$ takové, že

$$\mathcal{R}(a) \cap A = \emptyset.$$

Příklad

Určete vnitřek, vnějšek, uzávěr, hranici, izolované body a hromadné body množiny:

- $A_1 = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{R},$
- $A_2 = (0, 1) \cup \{2\} \cup \mathbb{R},$
- $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \mathbb{R}^2,$
- $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1 \wedge x^2 + y^2 < 1\} \cup \mathbb{R}^2.$

Vztahy mezi jednotlivými množinami:

Poznámka

Z definic se dá dokázat, že $A^\circ \subset A$, $A \cap A^e = \emptyset$ a že trojice A° , hA , A^e tvoří rozklad prostoru $\mathbb{R}^N$ (to znamená, že $A^\circ \cup hA \cup A^e = X$ a přitom $A^\circ \cap hA = \emptyset$, $hA \cap A^e = \emptyset$, $A^\circ \cap A^e = \emptyset$). Dále platí $A^\circ = A \setminus clA$, $\bar{A} = A \cup hA$ atd.

Topologické pojmy v $\mathbb{R}^N$

Vše se točí okolo tzv. **otevřených množin**.

Definice

Otevřenou množinou v $\mathbb{R}^N$ rozumíme takovou množinu, **jejíž každý bod je jejím vnitřním bodem**. (nebo-li: Množina $O \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá otevřená, jestliže

$$\forall x \in O \exists \mathcal{U}(x) : \mathcal{U}(x) \subset O;$$

nebo také: $O \subset \mathbb{R}^N$ nazveme otevřenou jestliže $O = \text{int} O$.)

Věta

Množiny $\emptyset$ a $\mathbb{R}^N$ jsou otevřené. Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina. Průnik konečného množství otevřených množin je otevřená množina.

Definice

Množinu $M \subset \mathbb{R}^N$ nazýváme uzavřenou, jestliže $M = \text{cl} M$.

Věta

Množina je uzavřená právě tehdy když její množinový doplněk v $\mathbb{R}^N$ je otevřená množina.

Z předchozích vět plyne:

Věta

Množiny $\emptyset$ a $\mathbb{R}^N$ jsou uzavřené. Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina. Sjednocení konečného množství uzavřených množin je uzavřená množina.

Dále platí

Věta

Vnitřek množiny je otevřená množina. Uzávěr množiny je uzavřená množina.

Příklad

Určete které množiny jsou uzavřené, otevřené: $M_1 = (1, 2)$, $M_2 = \langle 0, 1) \cup \{2\}$, $M_3 = \mathbb{Q}$.

Na závěr definujeme další matematikou strukturu – topologický prostor.

Definice

Nechť X je neprázdná množina, τ je systém jejích podmnožin mající vlastnosti

- (i) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$,*
 - (ii) Je-li $M_\alpha \in \tau$ pro všechna $\alpha \in I$ ($I \neq \emptyset$), pak $\bigcup_\alpha M_\alpha \in \tau$,*
 - (iii) Je-li $M_i \in \tau$ pro $i = 1, \dots, n$, pak $\bigcap_{i=1}^n M_i \in \tau$.*
- Pak uspořádanou dvojici (X, τ) nazýváme topologický prostor.*

Poznámka

Vlastnost (ii) říká, že sjednocení libovolného počtu množin z τ je opět množina z τ a vlastnost (iii) říká, že průnik konečného počtu množin z τ je opět prvek z τ .

Poznámka

Označme symbolem τ množinu všech otevřených množin v $\mathbb{R}^N$. Z předchozího vyplývá, že dvojice $(\mathbb{R}^N, \tau)$ tvoří topologický prostor.

-  Kojecká, J., Kojecký, T.: Matematická analýza pro 1. semestr, VUP, Olomouc, 1997.
-  Krupková V., Fuchs, P.: Matematika 1, VUT, Brno, 2007 (dostupné v elektronické podobě)
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (I), Matfyzpress, Praha, 2004.
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (II), Matfyzpress, Praha, 2007.
-  Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU, Brno 2003.

+ elektronická skripta