

Matematická analýza pro informatiky I.

2. přednáška

Jan Tomeček
tomecek@inf.upol.cz
<http://aix-slx.upol.cz/~tomecek/index>

Univerzita Palackého v Olomouci

17. února 2010

Reálné funkce jedné a více reálných proměnných

Definice

*Funkce je **zobrazení**, jehož **obor hodnot je množina čísel** (je-li obor hodnot podmnožinou $\mathbb{R}$, nazýváme ji reálná funkce; pro $\mathbb{C}$ komplexní funkce).*

Nechť $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, funkci $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme (reálnou) funkcí N reálných proměnných, množinu A nazýváme definiční obor funkce f (ozn. $\mathcal{D}(f)$), množinu $f(A)$ nazýváme obor hodnot (image) funkce f (označujeme $\mathcal{H}(f)$).

Úmluva

Zápisem $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ budeme rozumět reálnou funkci pro niž $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme-li, že funkce $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná na množině $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$, budeme tím myslet $A \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme-li, že funkce $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém (redukovaném) okolí bodu $a \in \mathbb{R}^N$, budeme tím myslet, že existuje $\mathcal{U}(a)$ ($\mathcal{R}(a)$) tak, že $\mathcal{U}(a) \subset \mathcal{D}(f)$ ($\mathcal{R}(a) \subset \mathcal{D}(f)$).

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. *Grafem funkce f rozumíme množinu*

$$\text{graf}(f) = \{(x_1, \dots, x_N, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1} : \\ (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{D}(f) \wedge x_{N+1} = f((x_1, \dots, x_N))\}.$$

Nakreslit můžeme pouze graf funkce jedné nebo dvou proměnných. Pro vizualizaci grafu funkce dvou a tří proměnných si můžeme pomoci **hladinami funkce** – viz dále.

Obrázek: Graf funkce jedné a dvou proměnných

Poznámka

Funkce jsou *jednoznačně dány* svým *definičním oborem* a *funkčními hodnotami*. Nebo-li, funkce f_1 a f_2 jsou si rovny ($f_1 = f_2$) právě tehdy když

$$\mathcal{D}(f_1) = \mathcal{D}(f_2) \wedge (\forall x \in \mathcal{D}(f_1) : f_1(x) = f_2(x))$$

Příklad

Funkce

$$f_1(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

a

$$f_2(x) = \sin x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

si *nejsou rovny*, protože jejich definiční obory si nejsou rovny (Nakreslete jejich grafy!).

Definice

Nechť je dána $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ a množina $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}(f)$. Funkci $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou

$$\mathcal{D}(g) = A, \quad g(x) = f(x), \quad x \in A$$

nazýváme *restrikcí funkce f na množinu A* , označujeme ji $f|_A$.

Funkce můžeme **sčítat, odčítat, násobit i dělit**.

Definice

Nechť $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Součtem, součinem, rozdílem a podílem rozumíme funkce

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f \pm g) := \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f \cdot g) := \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f/g) := \\ \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \cap \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) \neq 0\}.$$

Funkce jedné reálné proměnné

Zaměříme se na speciální případ: $N = 1$, tedy na funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *rostoucí* (*klesající*, *neklesající*, *nerostoucí na množině* $M \subset \mathcal{D}(f)$), jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in M : \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \\ (f(x_1) > f(x_2), f(x_1) \leq f(x_2), f(x_1) \geq f(x_2))$$

Funkcím *neklesajícím* a *nerostoucím* říkáme souhrnně *monotonní*, *rostoucím* a *klesajícím* říkáme souhrnně *ryze monotonní* (na množině M).

Jak poznáme monotonní funkce z jejich grafu?

Definice

Řekneme, že $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **prostá**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f) : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Řekneme, že $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **prostá na množině** $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}(f)$, je-li $f|_A$ prostá.

Definice

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je prostá. Pak $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f), \quad \forall y \in \mathcal{D}(f^{-1}) \forall x \in \mathcal{D}(f) : f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

nazýváme **inverzní funkce** k f .

Poznámka

Jak poznáte z grafu prostou funkci? Jak jsme schopni z grafu prosté funkce načrtnout graf k ní inverzní funkce?

Příklad

Funkce

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

není prostá – nemá tedy inverzní funkci. Ale třeba funkce $f|_{\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle}$ již prostá je – inverzní funkci k ní nazýváme $\arcsin(x)$. Jaký je její definiční obor a obor hodnot?

Definice

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (1) Pokud je definiční obor symetrický podle počátku (tj. platí implikace $x \in \mathcal{D}(f) \implies -x \in \mathcal{D}(f)$), pak řekneme, že funkce f je

- (a) **sudá**, je-li $f(-x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$,
- (b) **lichá**, je-li $f(-x) = -f(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$.

(2) Nechť $p > 0$ a definiční obor je p -periodická množina (tj. $x \in \mathcal{D}(f) \implies x \pm p \in \mathcal{D}(f)$). Řekneme, že f je **periodická s periodou p** , jestliže $f(x \pm p) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$.

Definice

Nechť $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(g) \cap \mathcal{D}(f) \neq \emptyset$. *Složení funkcí f a g rozumíme funkci $f \circ g$ definovanou takto: $\mathcal{D}(f \circ g) = \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) \in \mathcal{D}(f)\}$,*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad x \in \mathcal{D}(f \circ g)$$

Funkci f říkáme *vnější* a funkci g *vnitřní* funkce funkce $f \circ g$.

Příklad

(a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$. $f \circ g = ?$.

(b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. $f \circ g = ?$.

(b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \ln x$. $f \circ g \circ h = ?$.

Poznámka

Nechť f je prostá. Pak

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) : f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{a} \quad \forall y \in \mathcal{D}(f^{-1}) : f(f^{-1}(y)) = y.$$

Elementární funkce jedné proměnné

Funkcí $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **opravdu hodně**. My známe (ze základní a střední školy) pouze *malou* skupinu speciálních funkcí – říkáme jim **elementární funkce**. Elementární funkce rozdělujeme na:

- 1 mocninná funkce: $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- 2 exponenciální funkce: $f(x) = a^x$, $a > 0$,
- 3 logaritmická funkce: $f(x) = \log_a x$, $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$,
- 4 trigonometrická funkce: $\sin$, $\cos$, tg , cotg ,
- 5 cyklometrické funkce: $\arcsin$, $\arccos$, arctg , $\operatorname{arccotg}$,
- 6 hyperbolické funkce: sh , ch , th , cth ,
- 7 hyperbolometrické funkce: argsh , argch , argth , argcth ,

Často se mezi elementární funkce řadí i funkce vzniklé algebraickými operacemi a skládáním z výše zmíněných funkcí. Např.

❶ Polynomiální funkce:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$.

❷ Racionální funkce:

$$f(x) = P(x)/Q(x),$$

kde P a Q jsou polynomiální funkce.

Mezi základní dovednosti a znalosti studenta patří nakreslení grafu elementárních funkcí a znalost jejich vlastností. **Budou na zkoušce vyžadovány.** Tyto vědomosti se budou hodit pořád!

Funkce více proměnných

Nyní se podívejme na funkce, jejichž definiční obor je podmnožinou $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ (případ $N = 1$ jsme právě probrali).

Poznámka

Mějme $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{D}(f)$. Pro jednoduchost budeme funční hodnotu funkce f v bodě $(x_1, \dots, x_N)$ místo $f((x_1, \dots, x_N))$ psát $f(x_1, \dots, x_N)$.

Poznámka

Je-li funkce f dána předpisem a není určen její definiční obor, pak definičním oborem budeme rozumět množinu všech uspořádaných N -tic, pro které má předpis funkce smysl – nazýváme jej **přirozeným definičním oborem**.

Příklad

Definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

je zřejmě množina

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

tedy uzavřený jednotkový kruh (kruh o poloměru 1 se středem v počátku).

Zobrazování grafů funkcí více proměnných je již poměrně složitý problém. Lepší představu o průběhu funkce dvou a třech proměnných nám může dát následující pojem.

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. **Hladinou funkce f příslušné k číslu c** (nebo-li c -hladinou funkce f) nazýváme množinu

$$H_c = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}(f) : f(x_1, \dots, x_n) = c\}.$$

Příklad

Načrtněte hladiny funkce

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Operace s funkcemi více proměnných

Algebraické operace jsme zavedli již na začátku přednášky. Podívejme se na skládání funkcí.

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1, g_2, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou takové, že

$$\mathcal{D}(g_i) = A \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \wedge \quad \{(g_1(x), \dots, g_m(x)) : x \in A\} \subset \mathcal{D}(f).$$

Pak složením funkcí f a $g_1, \dots, g_m$ rozumíme funkci $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (n proměnných) definovanou vztahem

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$$

pro každé $(x_1, \dots, x_n) \in A$ (tedy $\mathcal{D}(F) = A$). Funkci f nazýváme **vnější** funkcí funkce F a funkce $g_1, \dots, g_m$ nazýváme **vnitřními** funkcemi funkce F . Značíme $F = f(g_1, \dots, g_m)$ nebo $F = f \circ (g_1, \dots, g_m)$.

Příklad

Nechť

$$f(u, v) = u^2 + v^3 \quad \text{pro každé } (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$g_1(x, y, z) = xyz \quad \text{pro každé } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$g_2(x, y, z) = x + y \quad \text{pro každé } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Pak složená funkce $F = f(g_1, g_2, g_3)$ má předpis

$$F(x, y, z) = x^2 y^2 z^2 + (x + y)^3 \quad \text{pro každé } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Definice

Pro každé $i = 1, \dots, N$ rozumíme i -tou projekcí v $\mathbb{R}^N$ funkci $\Pi_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$\Pi_i(x_1, \dots, x_N) = x_i \quad \text{pro každé } (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Definice

Elementární funkce N proměnných jsou funkce vzniklé pomocí algebraických operací (tj. sčítání, násobení, odčítání a dělení) a operace skládání z těchto funkcí:

- 1 konstantní funkce N proměnných,
- 2 elementární funkce jedné proměnné,
- 3 projekce v $\mathbb{R}^N$.

Zřejmě z konstantních funkcí a projekcí můžeme pomocí operace násobení vytvořit funkce mající předpis

$$g(x_1, \dots, x_N) = cx_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_N^{k_N},$$

kde $c \in \mathbb{R}$, $k_i \in \mathbb{N}_0$ pro každé $i = 1, \dots, n$.

Funkci g budeme nazývat **jednočlenem stupně $k_1 + \dots + k_n = m$** . Součet libovolného (konečného) počtu jednočlenů stupně nejvýše m nazýváme **polynomem v $\mathbb{R}^N$ stupně m** . Například

$$P(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 x_3^5 + 4x_1 x_2^2 x_3 - 2x_1 x_2$$

je polynom stupně 8.

Definice

Polynom P v $\mathbb{R}^n$ nazveme **homogenním polynomem stupně k** , jestliže platí

$$P(tx_1, \dots, tx_n) = t^k P(x_1, \dots, x_n)$$

pro každé $t \in \mathbb{R}$ a $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Příklad

Polynom

$$P(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 x_3^5 + 2x_1^8 - 3x_1 x_2^7 + 4x_1 x_2 x_3^6$$

je homogenní polynom stupně 8. Všimněte si, že všechny jednočleny, ze kterých je tento polynom sestaven jsou stupně 8. To není náhoda. Homogenní polynomy jsou součtem jednočlenů o stejném stupni.

Poznámka

Homogennímu polynomu stupně k se často říká **forma k -tého stupně** (hápeme-li prvky z $\mathbb{R}^N$ jako vektory). Homogenní polynom prvního stupně (formou prvního stupně; lineární formou) v $\mathbb{R}^N$ je zobrazení definované předpisem

$$l(x_1, \dots, x_N) = c_1 x_1 + \dots + c_N x_N$$

pro každé $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, kde $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$.

Homogenním polynomem druhého stupně (formou druhého stupně; kvadratickou formou) v $\mathbb{R}^N$ je zobrazení definované předpisem

$$k(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} x_i x_j$$

pro každé $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i, j = 1, \dots, N$.

Příklad

Funkce

$$k(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_4 - x_3x_4$$

je kvadratická forma v $\mathbb{R}^4$.

Při vyšetřování tzv. lokálních extrémů funkcí N proměnných budou mít pro nás zásadní význam formy stupně jedna a dva, tzn. lineární a kvadratické formy. Grafem lineární formy je rovina procházející počátkem. Grafem kvadratické formy jsou speciální případy kvadrik – může jít o rotační paraboloid, sedlovou plochu apod.

Příklad

Načrtněte grafy funkcí

(a) $f(x, y) = 2x - 3y$,

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2$,

(c) $f(x, y) = xy$.

Určete, které z funkcí jsou homogenní polynomy (formy) a určete jejich stupeň. Návod: S výhodou lze využít pojem hladiny funkce.

-  Kojecká, J., Kojecký, T.: Matematická analýza pro 1. semestr, VUP, Olomouc, 1997.
-  Krupková V., Fuchs, P.: Matematika 1, VUT, Brno, 2007 (dostupné v elektronické podobě)
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (I), Matfyzpress, Praha, 2004.
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (II), Matfyzpress, Praha, 2007.
-  Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU, Brno 2003.

+ elektronická skripta