

Matematická analýza pro informatiky I.

3. přednáška

Limita posloupnosti (I)

Jan Tomeček
tomecek@inf.upol.cz
<http://aix-slx.upol.cz/~tomecek/index>

Univerzita Palackého v Olomouci

25. února 2011

Posloupnosti reálných čísel

Ze střední školy asi znáte pojem nekonečné posloupnosti reálných čísel. Jedná se o jakousi nekonečnou „frontu“ čísel – každé číslo v ní má své místo, má svého předchůdce (kromě prvního prvku) a svého následovníka. Např. posloupnost

$$1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, \dots$$

znáte jako tzv. geometrickou posloupnost, jejíž první prvek je roven jedné a kvocient jedné polovině. Důležité je zde pořadí konkrétního čísla, např. $1/4$ je třetí prvek, $1/16$ je čtvrtý prvek, apod. Posloupnost může být ale třeba i taková

$$2, 2, 2, 2, \dots$$

(tzv. konstantní posloupnost) – jde o geometrickou posloupnost s kvocientem rovným jedné.

Formálně definujeme posloupnost takto:

Definice

Reálnou funkci jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel nazýváme **posloupností reálných čísel**.

Pro posloupnost $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ používáme následující označení:

- a_n namísto $a(n)$ – nazýváme n -tý člen posloupnosti,
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ namísto a – posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,
- $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ místo $a(\mathbb{N})$ – množina hodnot prvků posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Posloupnost bývá zadána

- výčtem jejích členů - např.

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots,$$

- předpisem pro výpočet n -tého prvku - např. $a_n = 2^{n-1}$,
- rekurentním vzorcem - např. $a_{n+1} = 2a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $a_1 = 1$.

Graf posloupnosti

Protože **posloupnost** reálných čísel **je** reálná **funkce jedné** reálné **proměnné**, graf posloupnosti je již vlastně definován.
Je to velmi důležitý prostředek pro pochopení pojmů souvisejících s posloupnostmi.

Monotónní posloupnosti

Částo se budeme setkávat s následujícími typy posloupností.

Definice

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je

(a) **neklesající**, jestliže

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(b) **rostoucí**, jestliže

$$a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(c) **nerostoucí**, jestliže

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(d) **klesající**, jestliže

$$a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Definice

- (e) *monotónní*, *jestliže je neklesající nebo nerostoucí*,
- (f) *ryze monotónní*, *jestliže je rostoucí nebo klesající*,

Např. $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ není monotónní, konstantní posloupnost je nerostoucí i neklesající zároveň.

Omezené posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je

(a) *zdola omezená*, jestliže je množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ zdola omezená, nebo-li

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq K,$$

(b) *shora omezená*, jestliže je množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ shora omezená, nebo-li

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq K,$$

(c) *omezená*, jestliže je množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ omezená, nebo-li

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq K.$$

Např. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená zdola a není omezená shora, $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, $\{(-3)^n\}_{n=1}^{\infty}$ není omezená ani shora ani zdola, apod.

Limita posloupnosti

U posloupností nás bude především zajímat, jakých hodnot nabývají její prvky s „hodně velkými“ indexy. Jinak řečeno (opět nepřesně), zajímá nás, co se děje s prvky a_n jestliže n roste „do nekonečna.“

Příklad

Uvažujme posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$. Co lze vyčíst z grafu této posloupnosti? K čemu se „přibližují“ hodnoty $1/n$ posloupnosti, když index n stále zvětšujeme?

*Odpověď zní, že se **neomezeně** přibližují k nule. Proč? A co znamená „neomezeně přibližovat se k nule?“ Potřebujeme přesnou definici.*

Proč je důležité slovo **neomezeně**? Např. jak je to s přibližováním posloupností $\{1 + 1/n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ k nule?

Pokus o konstrukci definice vlastní limity posloupnosti

Zabývejme se nejprve následující větou:

Prvky posloupnosti **nezáporných** reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se pro rostoucí index n neomezeně přibližují k nule .

Jak si to představit? Jak tuto představu přesně **zformulovat** pomocí symbolů výrokové logiky?

Uvažujme posloupnosti

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{1}{n} + 0,1\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{1}{n} + 0,000001\right\}_{n=1}^{\infty}, \dots$$

Které „se přibližují k nule“? A které ne? Proč? V čem je mezi nimi rozdíl? Co zapříčiní, že některé jdou k nule a některé ne?

Pokus o konstrukci definice vlastní limity posloupnosti

Můžeme zformulovat definici pro definici **nulové** limity pro posloupnost s **nezápornými** prvky:

Definice

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **nezáporných** čísel „jde k nule“, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každý index $n \in \mathbb{N}$ platí, že je-li $n \geq n_0$, pak $a_n < \epsilon$, zkráceně:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies a_n < \epsilon$$

Pokus o konstrukci definice vlastní limity posloupnosti

Nyní jsme připravení k odvození definice vlastní limity posloupnosti.
Jak chápat větu:

Prvky posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se pro rostoucí n neomezeně přibližují k reálnému číslu $a \in \mathbb{R}$.

To si asi můžeme představit tak, že posloupnost

$$\{|a_n - a|\}_{n=1}^{\infty}$$

vzdáleností prvků posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ od čísla a půjde k nule.
Všimněme si faktu, že tato posloupnost má **nezáporné členy**! Stačí tedy přeformulovat naši definici z předchozího slajdu.

Definice (vlastní) limity posloupnosti

Definice

Je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a číslo $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že a je (vlastní) limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jestliže ke **každému** $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon.$$

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a (posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu a), píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Fakt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ se tedy zapíše takto

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon).$$

Výrok

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon)$$

lze napsat jako

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}_\epsilon(a))$$

a tedy jako

$$\forall \mathcal{U}(a) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(a)).$$

Je dobré chápat všechny kroky. Všimněte si, že definici lze říct bez ϵ – jen s pomocí okolí bodu a .

Zápis výroku z definice lze ještě zjednodušit. Nejprve představme následující definici:

Definice

Nechť $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$ je výroková forma. Řekneme, že

$V(n)$ platí pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$

jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $V(n)$.

Výrok

$$\forall \mathcal{U}(a) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(a))$$

lze tedy přepsat na

$$\forall \mathcal{U}(a) (a_n \in \mathcal{U}(a) \text{ pro skoro všechna } n \in \mathbb{N}).$$

Dokažme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. Máme dokázat, že platí

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon),$$

pro $a_n = 1/n$ a $a = 0$.

Zvolme tedy $\epsilon > 0$. K němu je potřeba najít index n_0 takový, že pro všechny indexy $n \in \mathbb{N}$, které jsou větší nebo rovny n_0 platí

$$|1/n - 0| < \epsilon.$$

Upravíme poslední nerovnost a získáme

$$n > 1/\epsilon.$$

Z toho již snadno lze zjistit, že položíme-li $n_0 = [1/\epsilon] + 1$, pak implikace

$$n \geq n_0 \implies n > 1/\epsilon$$

platí. Kreslete si obrázek!

Nevlastní limita

Příklad

Uvažujme posloupnost $\{n^2\}$. Co lze vyčíst z grafu? K čemu se přibližují hodnoty pro n jdoucí do nekonečna?

Odpověď: K žádnému reálnému číslu. Hodnoty „rostou neomezeně“, když n roste nade všechny meze. Jak to popsat matematicky?

Příklad

Nebo co třeba posloupnost $\{-n^3\}$? Prvky zase klesají neomezeně.

Opět potřebujeme přesnou definici.

Definice nevlastní limity

Definice

Je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(a) Říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má (nevlastní) limitu ∞ , jestliže ke každému $L \in \mathbb{R}$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n \geq n_0 \implies a_n > L.$$

Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

(b) Říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má (nevlastní) limitu $-\infty$, jestliže ke každému $L \in \mathbb{R}$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n \geq n_0 \implies a_n < L.$$

Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Definujeme pojem okolí „nevlastních“ bodů $\pm\infty$. Pro $L \in \mathbb{R}$ definujeme množiny

$$\mathcal{U}_L(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : L < x\} \quad \text{a} \quad \mathcal{U}_L(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} : L > x\}$$

jako L -okolí bodů $\pm\infty$ (zkráceně píšeme $\mathcal{U}(\infty)$, $\mathcal{U}(-\infty)$).
Pak lze definici limity ∞ (podobně pro $-\infty$)

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \implies a_n > L),$$

napsat jako

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}_L(\infty)),$$

a poté přepsat jako

$$\forall \mathcal{U}(\infty) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(\infty)).$$

Všimněte si, že jde o **stejný zápis** jako u vlastní limity.

Limita posloupnosti

Pojem vlastní a nevlastní limity lze tedy napsat do jedné definice - s využitím pojmu okolí bodů z $\mathbb{R}^*$.

Definice

Je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a číslo $a \in \mathbb{R}^*$. Říkáme, že a je **limitou posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jestliže ke každému $\mathcal{U}(a)$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(a).$$

Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Existence a jednoznačnost limity

Definice máme za sebou. Teď je třeba se ptát: Má každá posloupnost limitu? Může mít posloupnost více jak jednu limitu? Odpověď zní v obou případech **ne**.

Jednoznačnost limity

Nejprve odpovíme na druhou otázku: Kolik limit může posloupnost mít?

Věta

K dané posloupnosti existuje nejvýše jedna limita.

Důkaz

Je třeba dokázat, že nenastane ani jedna z následujících situací:

- (a) Existují $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$,
- (b) existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$,
- (c) existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$,
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Stručná odpověď: buď žádnou nebo jen jednu.

Existence limity

Zde už je otázka složitější – jak už víme, tak např. posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu. Jak později dokážeme, existují posloupnosti, které limitu nemají (např. posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu).

Věta

Každá monotónní posloupnost má limitu. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Příklad

- (a) Je-li $q \in (0, 1)$, pak je posloupnost $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající, dokonce platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

- (b) Je-li $\alpha > 0$, pak je posloupnost $\{n^\alpha\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí, dokonce platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \infty.$$

- (c) Je-li $\alpha < 0$, pak je posloupnost $\{n^\alpha\}_{n=1}^{\infty}$ klesající, dokonce platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = 0.$$

- (d) Konstantní posloupnost $\{c\}_{n=1}^{\infty}$ (kde $c \in \mathbb{R}$) je nerostoucí i neklesající zároveň. Má limitu rovnou číslu c .

Monotonní, omezené a konvergentní posloupnosti

Následující výroky zkuste dokázat

Věta

Každá posloupnost mající vlastní limitu je omezená.

Každá posloupnost mající limitu ∞ je zdola omezená, shora neomezená.

Každá posloupnost mající limitu $-\infty$ je zdola neomezená, shora omezená.

Každá nerostoucí posloupnost je shora omezená.

Každá neklesající posloupnost je zdola omezená.

Každá neklesající shora omezená posloupnost má vlastní limitu.

Každá nerostoucí zdola omezená posloupnost má vlastní limitu.

Aritmetika limit posloupností

Definice není vhodným nástrojem pro praktické počítání limit. Říká pouze to, zda je či není daná hodnota a limitou dané posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Potřebujeme nějaká tvrzení, na základě nichž bychom mohli efektivně počítat limity posloupností. Např. máme-li dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, které konvergují k číslům po řadě a , b , rádi bychom věděli, k čemu konverguje posloupnost $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Příklad

(a) $a, b \in \mathbb{R}$, (b) $a = \infty$, $b \in \mathbb{R}$, (c) $a = \infty$, $b = -\infty$.

Jak je to s násobením, odčítáním dělením posloupností a jejich limitami?

Je potřeba probrat celou řadu případů. My si ukážeme jen hlavní výsledky.

Věta

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel mající limitu (vlastní či nevlastní). Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, (b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N})$$

jsou-li operace na pravých stranách definovány.

Důkaz

Součet dvou konvergentních posloupností

Poznámka

Definujeme operace na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ takto:

Pro každé $a \in \mathbb{R}$

$$a \pm \infty = \pm\infty,$$

$$a > 0 \Rightarrow a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty,$$

$$a < 0 \Rightarrow a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, \frac{\pm\infty}{a} = \mp\infty,$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0,$$

$$|\pm\infty| = \infty,$$

$$+\infty + \infty = \infty, -\infty + (-\infty) = -\infty,$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty) = \infty, (\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty.$$

Následující výrazy nedefinujeme (nepřřazujeme jim hodnotu)

$$0 \cdot (\pm\infty), +\infty + (-\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\pm\infty}{\mp\infty},$$

říkáme jim **neurčité výrazy**.

Proč je nedefinujeme? Viz následující příklad:

Příklad

Je-li

(a) $a_n = 1/n$, $b_n = n$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$,

(b) $a_n = 1/n$, $b_n = n^2$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$.

*Závěr: Existují dvě dvojice posloupností, v nichž jedna jde k nule, druhá do nekonečna. Přitom limity součinů těchto dvojic jsou **různé**. Nelze tedy definovat výraz $0 \cdot \infty$.*

Další důležité věty

Věta

(O monotónnosti limit) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti mající limitu a platí

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Věta

(dodatek) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti, pro které platí

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Příklad

Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty$.

Řešení. Platí

$$n \leq n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, pak díky dodatku k větě o monotónnosti platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty.$$

Věta

(o třech posloupnostech, o dvou policajtech) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti takové, že platí

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Příklad

Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, pro $q \in (-1, 0)$.

Řešení. Platí

$$-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n.$$

Víme již, že $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} -|q|^n = -\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$. Z věty o třech posloupnostech plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Bolzanova–Cauchyova podmínka

Definice

Řekneme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, jestliže

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})((m \geq n_0 \wedge n \geq n_0) \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon).$$

Věta

*(Bolzanova–Cauchyova nutná a postačující podmínka konvergence)
Posloupnost má vlastní limitu právě tehdy, když je cauchyovská.*

Tato věta nám říká, že pojem cauchyovské posloupnosti je ekvivalentní s pojmem konvergentní posloupnosti mající vlastní limitu. Používáme ji často v důkazech k tomu, abychom dokázali, že daná posloupnost má vlastní limitu.

-  Kojecká, J., Kojecký, T.: Matematická analýza pro 1. semestr, VUP, Olomouc, 1997.
-  Krupková V., Fuchs, P.: Matematika 1, VUT, Brno, 2007 (dostupné v elektronické podobě)
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (I), Matfyzpress, Praha, 2004.
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (II), Matfyzpress, Praha, 2007.
-  Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU, Brno 2003.

+ elektronická skripta