

Matematická analýza pro informatiky I.

4. přednáška

Limita posloupnosti (II)

Jan Tomeček
tomecek@inf.upol.cz
<http://aix-slx.upol.cz/~tomecek/index>

Univerzita Palackého v Olomouci

1. března 2011

Vybrané posloupnosti

Často budeme z posloupnosti tvořit jiné posloupnosti tak, že **vybereme** některé její prvky. To ale nebudeme dělat úplně libovolným způsobem.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **rostoucí** posloupnost **přirozených** čísel. Pak posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou vztahem

$$b_n = a_{k_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

nazýváme **podposloupností vybranou** z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Příklad

Vezmeme-li za posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrickou posloupnost

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$$

a $k_1 = 2, k_2 = 4, k_3 = 6, \dots$, pak posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je

$$4, 16, 64, 256, 1024, \dots$$

Jde tedy o vybranou posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Naopak posloupnost

$$4, 16, 16, 64, 64, 128, 1024, \dots$$

vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není. (PROČ?)

Věta

Má-li posloupnost limitu, pak každá posloupnost z ní vybraná má také limitu a obě jsou stejné.

Z této věty plyne důležitý důsledek.

Důsledek

*Lze-li z dané posloupnosti vybrat dvě podposloupnosti mající různé limity, pak tato posloupnost **nemá limitu**.*

Odtud lze ukázat, že např. posloupnosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ nemají limitu.

Jak už víme, tak každá posloupnost nemusí mít limitu. Nicméně lze říct aspoň něco o existenci **limity podposloupnosti**.

Věta

(Weierstrassova) Každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost (tj. mající vlastní limitu).

Důkaz

Věta

Každá posloupnost, která není omezená shora má podposloupnost mající nevlastní limitu ∞ .

Každá posloupnost, která není omezená zdola má podposloupnost mající nevlastní limitu $-\infty$.

Důkaz

Dobrovolný úkol (uzávěrka za 14 dní)

Hromadné body posloupnosti

Příklad

Posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a nemá limitu. Vybereme-li z ní podposloupnost pro $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 5, \dots$ (liché indexy) dostáváme konstantní posloupnost $\{-1\}_{n=1}^{\infty}$ mající limitu -1 . “Vezmeme-li prvky se sudými indexy”, dostáváme konstantní posloupnost $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ mající limitu 1 . Těmto hodnotám budeme říkat hromadné body posloupnosti – viz následující definici.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo $\bar{a} \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nazveme **hromadným bodem posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže existuje vybraná podposloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = \bar{a}.$$

Limes inferior a limes superior

Definice

*Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Nejmenší hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **limes inferior** a značíme*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

*Největší hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **limes superior** a značíme*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Z předchozího plyne, že např. posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dva hromadné body -1 a 1 . Je jasné, čemu budou rovny limes superior a inferior této posloupnosti.

Vztah mezi hromadnými body posloupnosti a limitou

Věta

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pak existuje $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ a platí

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Je-li navíc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Poznámka

Z předchozí věty plyne, že je-li

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ neexistuje.

... dokonce platí víc:

Věta

*Posloupnost má limitu právě tehdy, když má **jediný** hromadný bod (ten je roven limitě).*

Uvažujme speciální případ podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$b_n = a_{n+p}$$

kde $p \in \mathbb{N}$. Jednu implikaci v následující větě víme z jedné z předchozích vět (KTEROU?). Druhá je specialitou této speciální podposloupnosti.

Věta

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, $p \in \mathbb{N}$. Pak existuje limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy když existuje limita posloupnosti $\{a_{n+p}\}_{n=1}^{\infty}$. V případě, že existují, jsou si rovny.

Tato věta je velmi užitečná. Například pomocí ní můžeme jednoduše počítat limity...

Příklad

Vypočtěte limity posloupností $\{n/2^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{2^n/n!\}_{n=1}^{\infty}$. – na cvičení...

... a je přínosná i pro teorii: Pomocí ní můžeme zobecnit některé věty pro limity posloupností.

Důsledek

Necht' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Pak posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu.

Odkud to plyne?

... nebo třeba ...

Důsledek

(o třech posloupnostech, o dvou polícajtech) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti takové, že platí

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0,$$

kde $n_0 \in \mathbb{N}$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

... snadno lze zformulovat a dokázat i další dříve uvedené věty ...

Posloupnosti v $\mathbb{R}^N$

Nyní se podívejme na posloupnosti N -tic reálných čísel („vektorů“).
Nejprve definice posloupnosti usp. N -tic:

Definice

Zobrazení $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$ (tedy $\mathcal{D}(a) = \mathbb{N}$) budeme nazývat posloupností N -tic reálných čísel („ N -složkových vektorů“).

Pro posloupnost $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$ používáme následující označení:

- $a^{[n]}$ namísto $a(n)$ – nazýváme n -tý člen posloupnosti,
- $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ namísto a – posloupnost $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$,
- $\{a^{[n]} : n \in \mathbb{N}\}$ místo $a(\mathbb{N})$ – množina hodnot prvků posloupnosti $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$.

Opět množina (prostor) $\mathbb{R}^N$

Než se pustíme do vyšetřování posloupností vektorů, připomeneme si a rozšíříme některé pojmy související s metrickým prostorem $\mathbb{R}^N$.

Ze střední školy znáte (pro $N = 2, 3$) pojem skalární součin vektorů definován jako

$$x, y \in \mathbb{R}^N : \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

(jaký znáte geometrický význam?)

Dále možná znáte velikost vektoru (tzv. euklidovská norma vektoru)

$$x \in \mathbb{R}^N : \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

A nakonec vzdálenost dvou vektorů (euklidovská metrika)

$$x, y \in \mathbb{R}^N: \quad d_E(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}.$$

Proto se nám může jevit metrika d_E (dá se dokázat, že jde skutečně o metriku v $\mathbb{R}^N$, např. $\triangle$ -nerovnost plyne z Minkovského nerovnosti – další domácí úkol) jako nejpřirozenější v $\mathbb{R}^N$. Pokud nebude řečeno jinak, budeme symbolem $\mathbb{R}^N$ rozumět vždy metrický prostor $(\mathbb{R}^N, d_E)$.

Poznámka

(Cauchy-Schwarzova nerovnost) Je-li $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, pak

$$x, y \in \mathbb{R}^N \quad \implies \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Opět okolí bodu

Jak už víme, ϵ -okolí bodu $a \in \mathbb{R}^N$ definujeme jako

$$\mathcal{U}_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^N : d_E(x, a) < \epsilon\}$$

tedy jako tzv. N -dimenzionální kouli (uvědomte si případy $N = 1, 2, 3$) o středu v bodě a a poloměru ϵ .

Redukované ϵ -okolí bodu $a \in \mathbb{R}^N$ definujeme jako

$$\mathcal{R}_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < d_E(x, a) < \epsilon\} = \mathcal{U}_\epsilon(a) \setminus \{a\}$$

(uvědomte si případy $N = 1, 2, 3$).

Graf posloupnosti

Tento pojem nebudeme pro $N > 1$ na této přednášce definovat. Samozřejmě je vždy žádoucí mít o pojmech nějakou vizuální představu. Jako nejvýhodnější se jeví zobrazit si prvky posloupnosti pro $N = 2, 3$ jako body v rovině, prostoru (pro $N = 1$ máme graf definován).

Omezené posloupnosti

Co intuitivně chápeme omezenou posloupností? Asi bychom tento pojem mohli definovat různě. My použijeme definici, kterou lze použít v libovolném metrickém prostoru.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^N$ je omezená, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^N$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : d_E(a^{[n]}, a) < K.$$

Limita posloupnosti

Definice je formálně téměř stejná jako definice limity posloupnosti reálných čísel. Budeme zde ovšem definovat pouze **vlastní** limitu.

Definice

Je dána posloupnost $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^N$ a číslo $a \in \mathbb{R}^N$. Říkáme, že a je **limitou posloupnosti** $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ ($\forall \mathbb{R}^N$), jestliže ke každému $\mathcal{U}(a)$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n \geq n_0 \implies a^{[n]} \in \mathcal{U}(a).$$

Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} = a$.

Definici limity lze zřejmě psát i takto (bez pojmu okolí)

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \implies d_E(a^{[n]}, a) < \epsilon).$$

Definici limity lze zřejmě psát ve tvaru (bez pojmu okolí)

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \implies d_E(a^{[n]}, a) < \epsilon).$$

Vzpomeneme-li si na limitu posloupnosti **reálných čísel**, pak lze tvrdit toto.

Věta

Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} = a$ právě tehdy když $\lim_{n \rightarrow \infty} d_E(a^{[n]}, a) = 0$.

Jinými slovy: Posloupnost vektorů konverguje k vektoru právě tehdy, když posloupnost vytvořená z **vzdáleností** prvků dané posloupnosti od tohoto vektoru konverguje k nule.

Budou nás zajímat podobné otázky jako u limity posloupnosti reálných čísel – jednoznačnost, existence, aritmetika limit, vztah omezené posloupnosti a konvergentní posloupnosti, Bolzanova–Cauchyova věta, Weierstrassova věta a další. Jak už je v matematice zvykem, pokud už něco umíme, je dobré převést nové problémy na ty staré – již vyřešené. Místo toho abychom dělali novou teorii, převedeme naše úvahy na **posloupnosti reálných čísel** – tedy to co už umíme.

Tím mostem mezi teorií posloupností reálných čísel a posloupností N -tic reálných čísel bude následující věta (dále se na ni budu odvolávat jako na „přemostovací“ větu):

Věta

Pro posloupnost $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^N$ a $a \in \mathbb{R}^N$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_i^{[n]} = a_i \text{ pro } i = 1, \dots, N.$$

kde $a^{[n]} = (a_1^{[n]}, a_2^{[n]}, \dots, a_N^{[n]})$, $a = (a_1, \dots, a_N)$.

Důkaz

Pro její důležitost si uvedeme její důkaz

Věta má třeba následující praktický význam.

Příklad

Posloupnost $\{(1 + \frac{1}{n})^n, 2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $(e, 0)$, protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0.$$

Nicméně věta řeší i otázky jednoznačnosti a existence, řeší problematiku aritmetiky limit posloupností v $\mathbb{R}^N$, atd.

Věta

Existuje nejvýše jedna limita posloupnosti v $\mathbb{R}^N$.

Otázka existence je opět složitější – ale podle „přemost'ovací“ věty stačí tuto otázku převést na otázku existence limit posloupností **složek** prvků této posloupnosti.

Omezené a konvergentní posloupnosti

Lze říct pouze toto:

Věta

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Opačná implikace neplatí (stejně jako u posloupností reálných čísel).

Aritmetika limit posloupností

Definice není opět vhodným nástrojem pro praktické počítání limit. Ovšem z „přemostřovací“ věty a po určitém úsilí (ne moc usilovném) plyne následující.

Věta

Nechť $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^N$ jsou konvergentní posloupnosti, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel mající vlastní limitu. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} \pm b^{[n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]} \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b^{[n]},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n a^{[n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a^{[n]}, b^{[n]} \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]}, \lim_{n \rightarrow \infty} b^{[n]} \rangle, \quad (Ddú)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_E(a^{[n]}, b^{[n]}) = d_E(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[n]}, \lim_{n \rightarrow \infty} b^{[n]}). \quad (Ddú)$$

Bolzanova–Cauchyova podmínka

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, jestliže

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(n_0 \leq m \wedge n_0 \leq n \Rightarrow d_E(a^{[m]}, a^{[n]}) < \epsilon).$$

Věta

*(Bolzanova–Cauchyova nutná a postačující podmínka konvergence)
Posloupnost má vlastní limitu právě tehdy, když je cauchyovská.*

Důkaz

Důkaz této věty se opět vede s využitím „přemost'ovací“ věty.

Tato věta nám říká, že pojem cauchyovské posloupnosti je ekvivalentní s pojmem konvergentní posloupnosti. Používáme často v důkazech k tomu, abychom dokázali, že posloupnost má limitu.

Vybrané posloupnosti

Definice bude stejná jako u vybrané posloupnosti reálných čísel. Není tedy třeba komentovat definici. Platí podobné věty jako u posloupností reálných čísel.

Věta

Má-li posloupnost limitu, pak každá posloupnost z ní vybraná má také limitu a obě jsou stejné.

Z této věty plyne důležitý důsledek.

Důsledek

Lze-li z dané posloupnosti vybrat dvě podposloupnosti mající různé limity, pak tato posloupnost nemá limitu.

Platí i tzv. Weierstrassova věta – její důkaz se opět vede tím způsobem, že pomocí „přemostňovací“ věty se převede na jednorozměrný případ. Důkaz nebudeme opět z časových důvodů provádět.

Věta

(Weierstrassova) Každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost.

Důkaz

je pěkný, jednoduchý a inspirativní – ale z časových důvodů ho opět nebudeme provádět

Obyčejně ke konvergenci v metrických prostorech

Mějme danou neprázdnou množinu X . Posloupnost prvků z X budeme definovat jako **zobrazení** $a : \mathbb{N} \rightarrow X$, budeme ji značit jako $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Asi byste čekali, že konvergenci v obecném metrickém prostoru (X, d) vypadá takto:

Definice

Je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ a číslo $a \in X$. Říkáme, že a je limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (v (X, d)) jestliže ke každému $\mathcal{U}(a)$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n \geq n_0 \implies a_n \in \mathcal{U}(a).$$

Píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Kde

$$\mathcal{U}_{\epsilon}(a) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}.$$

Jak vidíte, jako příliš velké zobecnění to nevypadá.

Bude nás zajímat následující problém. Máme danu množinu X a posloupnost prvků $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ z X a prvek $a \in X$. Předpokládejme, že na množině X jsou dány dvě různé metriky d_1, d_2 . Jak už víme, **definice limity závisí na metrice**. Naše otázka je formulována takto:

Platí ekvivalence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ v } (X, d_1) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ v } (X, d_2)?$$

Řečeno česky: Konverguje posloupnost v jedné metrice právě tehdy, když konverguje v druhé metrice? Pokud ano, jsou limity stejné?

Odpověď je následující – obecně, posloupnost konvergující k nějakému prvku vzhledem k jedné metrice **nemusí** konvergovat k tomuto prvku v jiné metrice.

Příklad

Uvažujme posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$. Jak už víme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (\text{správně musíme dodat: } v(\mathbb{R}, d_1)).$$

Uvažujme na $\mathbb{R}$ tzv. diskrétní metriku

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad \delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq y, \\ 0 & \text{pro } x = y. \end{cases}$$

*Zřejmě platí $\delta(1/n, 0) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\delta(1/n, 0) \not\rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Takže posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ **nekonverguje** v $(\mathbb{R}, \delta)$. (Dokonce se dá dokázat, že v tomto prostoru konvergují pouze konstantní posloupnosti – zkuste dokázat).*

Tedy zeptáme se konstruktivněji: Co musí dvě metriky d_1, d_2 na množině X splňovat, aby každá posloupnost konvergentní v jedné metrice byla konvergentní i v druhé metrice a šlo o stejnou limitu? Odpověď: Stačí aby metriky byly **ekvivalentní**.

Definice

Nechť X je neprázdná množina a d_1, d_2 jsou metriky na X . Řekneme, že metriky d_1 a d_2 jsou **ekvivalentní**, jestliže existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha, \beta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Věta

Nechť X je neprázdná množina a d_1, d_2 jsou **ekvivalentní** metriky na X . Pak pro každou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ a každé $a \in X$ platí ekvivalence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ v } (X, d_1) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ v } (X, d_2).$$

Věta

Nechť X je neprázdná množina a d_1, d_2 jsou **ekvivalentní** metriky na X . Pak pro každou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ a každé $a \in X$ platí ekvivalence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ v } (X, d_1) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ v } (X, d_2).$$

Důkaz

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ v } (X, d_1)$, tzn. $d_1(a_n, a) \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Z definice ekvivalence metrik plyne

$$0 \leq d_2(a_n, a) \leq \beta d_1(a_n, a) \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty,$$

tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ v } (X, d_2)$. Podobně se dokáže opačná implikace.

Poznámka

V $\mathbb{R}^N$ naštěstí platí, že euklidovská, součtová i maximová metrika jsou ekvivalentní. My jsme definovali konvergenci v $\mathbb{R}^N$ právě pomocí euklidovské. Z předchozích úvah je ale zřejmé, že to lze provést i pomocí zbývajících dvou. Ovšem třeba diskrétní metrika v $\mathbb{R}^N$ není ekvivalentní ani s jednou z nich.

-  Kojecká, J., Kojecký, T.: Matematická analýza pro 1. semestr, VUP, Olomouc, 1997.
-  Krupková V., Fuchs, P.: Matematika 1, VUT, Brno, 2007 (dostupné v elektronické podobě)
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (I), Matfyzpress, Praha, 2004.
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (II), Matfyzpress, Praha, 2007.
-  Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU, Brno 2003.

+ elektronická skripta