

Matematická analýza pro informatiky I.

5. přednáška

Limita funkce

Jan Tomeček
tomecek@inf.upol.cz
<http://aix-slx.upol.cz/~tomecek/index>

Univerzita Palackého v Olomouci

18. března 2011

Limita funkce

Motivace

Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Zajímalo by nás jaké hodnoty nabývá funkce f ve vybíraných bodech **blíživých se** k nule (nulu dosadit zřejmě nemůžeme). Nebo-li: beremeli-li x **čím dál bližší nule**, k čemu se **přibližují odpovídající funkční hodnoty**? Snadno spočítáme, že např.

$$\begin{aligned} f(0,1) &\approx 0,998334166, & f(0,01) &\approx 0,999983333, \\ f(0,001) &\approx 0,999999833, & f(0,0001) &\approx 0,999999998. \end{aligned}$$

Tedy dalo by se tipnout, že se hodnoty blíží k jedničce. To je ale potřeba lépe zformulovat a dokázat.

Motivace

A k čemu je to dobré? V dalším se budeme zabývat **derivací funkce**, kde nás budou zajímat hodnoty funkce

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pro x „velmi blízké“ číslu a (**všimněte si, že g není v a definovaná**, tedy výraz $g(a)$ nemá smysl!). No a k tomu potřebujeme příslušnou teorii. V tom nám pomůže teorie limit funkcí jedné proměnné.

Tento pojem vám asi bude trochu připomínat limitu posloupnosti (asi také proto, že se oba pojmy téměř stejně jmenují). Limit posloupností byly tři typy (vlastní, ∞ , $-\infty$). Typů limit funkcí bude mnohem více. Nejprve definujeme tzv. **vlastní limitu ve vlastním bodě**.

Definice

Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D(f)$. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je **limitou funkce** f v bodě a , jestliže

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon).$$

Píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Příklad

Jak je to např. s

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x?$$

Poznámka

Podobně jako u limity posloupnosti lze provést tento přepis. Definici limity

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon).$$

lze přepsat jako

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x \in \mathcal{R}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\epsilon(A))$$

a bez $\epsilon\delta$ symboliky pouze pomocí okolí takto

$$(\forall \mathcal{U}(A))(\exists \mathcal{R}(a))(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x \in \mathcal{R}(a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A))$$

a dokonce i takto

$$(\forall \mathcal{U}(A))(\exists \mathcal{R}(a))(f(\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)) \subset \mathcal{U}(A)).$$

Zdůvodněte si všechny kroky!

Příklad

Uvažujme funkci $f(x) = x + 1$. Dokážeme, že

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Podle definice limity máme být schopni **pro libovolně malé $\epsilon > 0$ nalézt $\delta > 0$** tak, že **pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí implikace**

$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(x + 1) - 2| < \epsilon.$$

Protože platí

$$|(x + 1) - 2| = |x - 1|$$

je vidět, že pro ϵ stačí vzít

$$\delta := \epsilon,$$

protože je-li $0 < |x - 1| < \delta = \epsilon$, pak

$$|x + 1 - 2| = |x - 1| < \epsilon.$$

Příklad

Uvažujme funkci $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. Dokážeme, že

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Podle definice limity máme být schopni pro libovolně malé $\epsilon > 0$ nalézt $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí implikace

$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \epsilon.$$

(Všimněte si, že z nerovnosti $0 < |x - 1|$ plyne, že $x \neq 1$ a tedy $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ má smysl. Navíc pro takové x platí

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1.)$$

Příklad

(pokračování...) Platí

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1|.$$

Pro dané ϵ lze položit

$$\delta := \epsilon,$$

protože je-li $0 < |x - 1| < \delta = \epsilon$, pak

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| < \epsilon.$$

Příklad

Uvažujme funkci $f(x) = 3x - 2$. Dokážeme, že

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4.$$

Podle definice limity máme být schopni pro libovolně malé $\epsilon > 0$ nalézt $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí implikace

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(3x - 2) - 4| < \epsilon.$$

Platí

$$|3x - 2 - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2|.$$

Pro dané ϵ lze položit

$$\delta := \frac{\epsilon}{3},$$

protože je-li $0 < |x - 2| < \delta = \epsilon/3$, pak

$$|3x - 2 - 4| = \dots = 3|x - 2| < 3\delta = 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Příklad

Uvažujme funkci $f(x) = x^2$. Dokážeme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Podle definice limity máme být schopni pro libovolně malé $\epsilon > 0$ nalézt $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí implikace

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - 0| < \epsilon.$$

Platí

$$|x^2 - 0| = |x^2| = |x|^2$$

Pro dané ϵ lze tedy položit

$$\delta := \sqrt{\epsilon},$$

protože je-li $0 < |x| < \delta = \sqrt{\epsilon}$, pak

$$|x^2 - 0| = \dots = |x|^2 < \delta^2 = (\sqrt{\epsilon})^2 = \epsilon.$$

Poznámka

Asi tušíte, že takovým způsobem počítat limity nebudeme. K tomu nám poslouží podobná věta jako u limit posloupností – její formulace bude uvedena až po definování ostatních typů limit.

Heineova věta

Následující věta nám ukáže souvislost mezi limitou funkce a limitou posloupnosti (a vlastně také alternativní definici limity funkce – protože jde o nutnou a postačující podmínku existence limity). Pomocí této věty opět můžeme využít znalostí o limitách posloupností k důkazu podobných vět u limit funkcí.

Věta

(Heineova) *Nechť $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f . Číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě a ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$) právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel takových, že $x_n \in \mathcal{D}(f)$ a $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí implikace*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Důkaz

(a) Předpokládejme, že $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a uvažujeme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \in \mathcal{D}(f)$ a $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Dokážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ [nebo-li

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - A| < \epsilon)].$$

Zvolme $\epsilon > 0$ libovolně. Z definice limity funkce plyne existence $\delta > 0$ takového, že pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon. \quad (1)$$

... pokračování důkazu

K tomuto $\delta > 0$ lze díky faktu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (definice limity posloupnosti) nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \delta.$$

Podle předpokladu ovšem také $0 < |x_n - a|$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Platí tedy

$$0 < |x_n - a| < \delta \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Z implikace (1) (dosazením x_n za x) tedy plyne

$$|f(x_n) - A| < \epsilon \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

První část důkazu je hotova.

... pokračování důkazu

(b) Nyní dokážeme, že platí-li

$$\begin{aligned} & (\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : (\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in \mathcal{D}(f) \setminus \{a\})) \\ & \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \right) \end{aligned} \quad (2)$$

pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, a to sporem. Předpokládejme, že platí (2) a zároveň $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$, tedy

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathcal{D}(f))(0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - A| \geq \epsilon). \quad (3)$$

Výrok (3) tedy říká, že existuje (nějaké, alespoň jedno) $\epsilon > 0$ tak, že pro každou volbu $\delta > 0$ najdeme x splňující

$$0 < |x - a| < \delta \quad \wedge \quad |f(x) - A| \geq \epsilon.$$

... pokračování důkazu

Položíme $\delta = 1/n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak z (3) dostáváme existenci takového $x = x_n$, že

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad |f(x_n) - A| \geq \epsilon \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Uvažujme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vytvořenou z těchto bodů. Zřejmě

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

(protože $0 < |x_n - a| < 1/n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$) a přitom

$$|f(x_n) - A| \geq \epsilon \quad \text{nebo-li} \quad f(x_n) \notin \mathcal{U}_{\epsilon}(A).$$

tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A.$$



Jednostranné limity

K bodu a se s x můžeme blížit různě – třeba zprava nebo zleva.

Definice

(jednostranná vlastní limita) Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $\mathcal{D}(f) \cap (a, \infty)$ (resp. $\mathcal{D}(f) \cap (-\infty, a)$). Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je limitou zprava (resp. zleva) funkce f v bodě a , jestliže

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))(a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon).$$

(resp.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))(a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon)).$$

Píšeme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$).

Poznámka

Definici lze vyjádřit ekvivalentně takto: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A \Leftrightarrow$

$$(\forall \mathcal{U}(A))(\exists \mathcal{R}^+(a))(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x \in \mathcal{R}^+(a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A)),$$

kde $\mathcal{R}^+(a) = \mathcal{R}(a) \cap (a, \infty)$.

Cvičení

Určete $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x)$.

Cvičení

Zkuste formulovat a dokázat analogii Heineovy věty pro jednostranné limity.

Vztah limity a jednostranných limit

Věta

Nechť je dána funkce f mající jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, kde $a \in \mathbb{R}$. Jestliže se tyto limity rovnají, pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Nevlastní limita ve vlastním bodě

Definice

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $\mathcal{D}(f)$. Řekneme, že ∞ (resp. $-\infty$) je limitou funkce f v bodě a , jestliže

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K)$$

(resp.

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < K).$$

Píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$).

Příklad

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Poznámka

Definici nevlastní limity lze opět vyjádřit pomocí okolí. Platí

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ právě tehdy, když

$$(\forall \mathcal{R}(\infty))(\exists \mathcal{R}(a))(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x \in \mathcal{R}(a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}(\infty)),$$

apod...

Poznámka

Jednostranné nevlastní limity

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty,$$

definujeme podobně jako jednostranné vlastní limity. Sami si nadefinujte.

Vlastní limita v nevlastním bodě

Definice

Nechť f je funkce taková, že ∞ (resp. $-\infty$) je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists L \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x > L \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon)$$

(resp.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists L \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x < L \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon)).$$

Píšeme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$).

Cvičení

Opět lze definice zapsat pomocí pojmů okolí bodů A a $\pm\infty$. Proved'te!

Nevlastní limita v nevlastním bodě

Definice

(nevlastní limita v nevlastním bodě) Necht' f je funkce taková, že ∞ (resp. $-\infty$) je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$.

(a) Řekneme, že ∞ je limitou funkce f v bodě ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists L \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x > L \Rightarrow f(x) > K)$$

(resp.

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists L \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x < L \Rightarrow f(x) > K)).$$

Píšeme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$).

pokračování definice

(b) Řekneme, že $-\infty$ je limitou funkce f v bodě ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists L \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x > L \Rightarrow f(x) < K)$$

(resp.

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists L \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x < L \Rightarrow f(x) < K)).$$

Píšeme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$).

Obecná definice limity funkce

Zápis předchozích definic pouze pomocí okolí nám je umožní všechny přepsat do definice jediné! Viz následující definici:

Definice

Nechť f je reálná funkce jedné proměnné, číslo $a \in \mathbb{R}^$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$.*

Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^$ je limitou funkce f v bodě a , jestliže*

$$(\forall \mathcal{U}(a))(\exists \mathcal{R}(a))(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x \in \mathcal{R}(a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A))$$

*Píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. Je-li A reálné číslo, nazýváme limitu **vlastní**, v opačném případě **nevlastní**.*

Poznámka

Definujeme $\mathcal{R}(\pm\infty) = \mathcal{U}(\pm\infty)$.

Obecná Heineho věta

Věta

Nechť f je reálná funkce jedné proměnné, číslo $a \in \mathbb{R}^$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$.*

Platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}^$ právě tehdy, když pro každou posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(f) \setminus \{a\}$ platí implikace*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Pokuste se o důkaz... inspiraci naleznete v důkazu Heineovy věty pro speciální případ $a, A \in \mathbb{R}$.

Jednoznačnost limity funkce

Nyní můžeme vyslovit větu o jednoznačnosti limity.

Věta

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f . Existuje nejvýše jedna*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Poznámka

To stejné lze říct i pro jednostranné limity – jestliže existuje jednostranná limita, pak je jediná.

Omezenost funkce a limita funkce

Věta

- (a) Má-li funkce f vlastní limitu v bodě $a \in \mathbb{R}^*$, pak existuje $\mathcal{R}(a)$ takové, že je funkce na $\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)$ omezená.
- (b) Má-li funkce f limitu ∞ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$, pak existuje $\mathcal{R}(a)$ takové, že je funkce na $\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)$ neomezená shora.
- (c) Má-li funkce f limitu $-\infty$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$, pak existuje $\mathcal{R}(a)$ takové, že je funkce na $\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)$ neomezená zdola.

Podobná tvrzení lze zformulovat a dokázat pro jednostranné limity.

Věta

Necht' f, g jsou funkce mající limity (vlastní i nevlastní) v bodě $a \in \mathbb{R}^$.
Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|,$$

jsou-li operace na obou stranách definovány.

Poznámka

- (1) Operace jsou definovány (resp. nedefinovány) stejně jako u limit posloupností.
- (2) Věta platí i pro jednostranné limity.

Věta

Nechť f, g jsou funkce definované na $\mathcal{R}(a)$ ($a \in \mathbb{R}^*$) takové, že

$$f(x) = g(x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathcal{R}(a).$$

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ právě tehdy když existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Pokud existují, jsou si rovny. *obecnější tvrzení: [Kojecká] Věta 4.24.*

Příklad

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10,$$

kde jsem výše zmíněnou větu použili *v předposlední rovnosti*. Poslední rovnost je třeba dokázat z definice.

Poznámka

K aritmetice limit funkcí lze říct mnohem více. Například platí-li, že $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$ a existuje $\mathcal{R}^+(a)$ tak, že $f(x) > 0 \forall x \in \mathcal{R}^+(a)$, pak

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

Například

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = \infty$$

(přímo to je vidět z grafu této funkce).

Poznámka

Nebo, je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a existuje $\mathcal{R}(a)$ takové, že funkce g je na $\mathcal{R}(a)$ omezená, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$

obecnější tvrzení: [Kojecká] Věta 4.24. Např. protože

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \text{a} \quad \sin(1/x) \text{ je omezená } \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0.$$

Je třeba zdůraznit, že $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ neexistuje – nemohli jsme tedy použít větu o aritmetice limit funkcí. Mimochodem, posledně zmíněnou limitu určíme na konci přednášky i jiným způsobem.

Dalším důležitým nástrojem jak pro praktický výpočet limity, tak pro teorii, je **věta o limitě složené funkce**. Tato věta například odpoví na otázku, čemu je rovna limita

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x^2 - 1).$$

Tato věta má dvě verze – my si uvedeme tu první (druhou příště).

Věta

(o limitě složené funkce I.) Necht' g, h jsou reálné funkce, $a \in \mathbb{R}^$ je hromadný bod definičního oboru funkce*

$$f = g \circ h,$$

existují limity $A = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$, $B = \lim_{y \rightarrow A} g(y)$ a

$$(\exists \mathcal{R}(a))(\forall x \in \mathcal{R}(a))(h(x) \neq A).$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B.$$

Příklad

Vypočteme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x^2 - 1).$$

Označíme $h(x) = x^2 - 1$, $g(y) = \sin(y)$, $f(x) = g(h(x)) = \sin(x^2 - 1)$.

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = 0.$$

Protože jsou splněny předpoklady předchozí věty, platí

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x^2 - 1) = 0.$$

Příklad

Spočítáme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, kde $f = g \circ h$,

$$g(y) = |\operatorname{sgn} y|, \quad h(x) = 0.$$

Použijeme předchozí větu. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} y| = 1,$$

pak podle ní

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Ale přímý výpočet (bez použití této věty) nám dává

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn}(h(x))| = \lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} 0| = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Dostáváme jiné výsledky – *v něčem je chyba...*

Další důležité věty

Věta

(o monotónnosti limity) Necht' f, g jsou funkce definované na $\mathcal{R}(a)$ ($a \in \mathbb{R}^$) mající limitu v tomto bodě a*

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}(a).$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

obecnější tvrzení: [Kojická] Věta 4.28.

Z této věty okamžitě plyne

Věta

Nechť f, g jsou definované funkce na redukovaném okolí bodu $a \in \mathbb{R}^$ a platí*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Pak existuje $\mathcal{R}(a)$ tak, že

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}(a).$$

Věta o třech limitách (funkcí)

Věta

(o třech limitách) Necht' f , g , h jsou funkce definované na $\mathcal{R}(a)$ ($a \in \mathbb{R}^*$),

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}(a)$$

a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A.$$

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$$

obecnější tvrzení: [Kojecká] Věta 4.29.

Příklad

Vypočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Řešení. Platí

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x| \quad \text{pro každé } x \neq 0.$$

Navíc

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

Z předchozí věty plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

-  Kojecká, J., Kojecký, T.: Matematická analýza pro 1. semestr, VUP, Olomouc, 1997.
-  Krupková V., Fuchs, P.: Matematika 1, VUT, Brno, 2007 (dostupné v elektronické podobě)
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (I), Matfyzpress, Praha, 2004.
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (II), Matfyzpress, Praha, 2007.
-  Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU, Brno 2003.

+ elektronická skripta

FAQ aneb otázky k zamyšlení

- Proč má být v definici limity funkce bod a hromadným bodem definičního oboru dané funkce?
- Co znamená, že ∞ (resp. $-\infty$) je hromadným bodem nějaké podmnožiny reálných čísel?