

Matematická analýza pro informatiky I.

6. přednáška

Spojitost funkce

Jan Tomeček
tomecek@inf.upol.cz
<http://aix-slx.upol.cz/~tomecek/index>

Univerzita Palackého v Olomouci

18. března 2011

Spojitosť funkce v bodě

Motivace

Vypočteme π^2 . Protože je toto číslo iracionální, **nelze ho vyjádřit přesně** v desetinném rozvoji ani jako podíl dvou přirozených čísel. Ani číslo π nelze vyjádřit přesně (dokonce ani většinu racionálních čísel nevyjádříme v počítači přesně). Lehce lze spočítat

$$3,14^2 = 9,8596, \quad 3,141^2 = 9,865881, \quad \text{atd.}$$

Čím bližší číslo číslu π máme, tím bližší číslo číslu π^2 v našich výpočtech očekáváme. To ovšem není úplná samozřejmost.

Motivace

Tento příklad lze interpretovat takto: Uvažujme funkci

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

a chceme vyčíslit její funkční hodnotu v bodě $a = \pi$. Počítáme hodnoty

$$f(3, 14), f(3, 141), \text{ atd.}$$

a očekáváme, že čím lepší máme aproximaci čísla π , tím blíže jsme přesnému číslu

$$f(\pi) = \pi^2.$$

V našem konkrétním případě nás intuice nezahlavila. Funkce $f(x) = x^2$ je totiž v bodě $a = \pi$ „spojitá.“

Motivace ...pokračování

Všimněte si podobnosti s motivačním příkladem na minulé přednášce (prezentoval se na něm pojem limita funkce. Měli jsme funkci

$$\frac{\sin x}{x}$$

a zajímaly nás funkční hodnoty „blízko“ čísla nula. V tom případě jsme nemohli do dané funkce číslo nula dosadit.

Nyní jsme v jiné pozici. Číslo π do funkce x^2 dosadit můžeme, ale prakticky nejsme schopni tuto hodnotu vypočítat. Praktického výpočtu jsme schopni jen pro „libovolně blízká“ čísla číslu π .

Spojitosť funkce v bodě

Definice

(Spojitost) Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D(f)$. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě a , jestliže

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

Poznámka

Uvědomte si, že jestliže implikace v definici platí pro nějaké $\delta > 0$, pak je splněna i pro každé $\delta' > 0$, které je menší nebo rovno δ (stejná poznámka platí i pro definici limity funkce).

Poznámka

Podobně jako u limity funkce lze provést tento přepis. Definici spojitosti funkce f v bodě a

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

lze přepsat jako

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x \in \mathcal{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\epsilon(f(a)))$$

a bez $\epsilon\delta$ symboliky pouze pomocí okolí takto

$$(\forall \mathcal{U}(f(a)))(\exists \mathcal{U}(a))(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x \in \mathcal{U}(a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(a)))$$

a dokonce i takto

$$(\forall \mathcal{U}(f(a)))(\exists \mathcal{U}(a))(f(\mathcal{U}(a) \cap \mathcal{D}(f)) \subset \mathcal{U}(f(a))).$$

Příklad

Dokažte, že funkce $f(x) = x^2$ je spojitá v bodě π .

Řešení. Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$. Máme dokazovat

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|x - \pi| < \delta \Rightarrow |x^2 - \pi^2| < \epsilon)$$

Vezmeme $\epsilon > 0$ libovolné. Zvolíme $\delta = \min\{1, \epsilon/(2\pi + 1)\}$. Protože pak bude pro všechna $x \in D(f)$ splňující

$$|x - \pi| < \delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{2\pi + 1}\right\}$$

(tedy $|x - \pi| < 1$ a zároveň $|x - \pi| < \epsilon/(2\pi + 1)$) platit

$$|x^2 - \pi^2| = |(x - \pi)(x + \pi)| = |x - \pi||x + \pi| < \delta|x + \pi| < \frac{\epsilon}{2\pi + 1}(2\pi + 1) = \epsilon.$$

... pokračování příkladu

A jak jsme přišli na δ ? Totiž, je-li $|x - \pi| < 1$, pak

$$-1 < x - \pi < 1,$$

$$\pi - 1 < x < \pi + 1,$$

$$2\pi - 1 < x + \pi < 2\pi + 1$$

a tedy pak $|x + \pi| < 2\pi + 1$. Pak můžeme provést odhad v našem důkazu.

Tedy f je spojitá v π .

Příklad

Zkuste dokázat podobně, že funkce $f(x) = x^3$ je spojitá v bodě π – uvědomte si, že to celé závisí na nalezení čísla δ (stejně jako u limity funkce).

Spojitosť v bodě a limita

Připadal vám důkaz spojitosti téměř shodný s důkazy o vlastních limitách ve vlastních bodech z minulé přednášky? Není to náhoda.

Věta

Nechť f je funkce, $a \in D(f)$.

- (a) Je-li bod a **hromadným bodem** množiny $D(f)$, pak f je v bodě a spojitá právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.*
- (b) V izolovaném bodě je funkce vždy spojitá.*

Vzhledem k tomu, že se budeme zabývat spojitostí pouze v hromadných bodech, budeme si pamatovat hlavně případ (a). **Tato věta nám pomůže k efektivnímu počítání limit.**

Domácí úkol

Pokuste se o důkaz. Plyne z definic těchto pojmů.

Heineova věta

Také u pojmu spojitosti lze vyslovit analogii Heineho věty (srovnejte obě věty!!!).

Věta

(Heine) Funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z definičního oboru funkce f , platí implikace

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Poznámka

Všimněte si, že Heineova věta nám dává charakterizaci spojitosti (podobně jako u limity). Dokonce nám tato charakterizace dává lepší představu než samotná definice – viz motivační příklad. Potřebujeme ale na její vyslovení znát pojem limity posloupnosti.

Důkaz

Je-li a izolovaný bod definičního oboru funkce f , pak je vidět (viz obrázek), že pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z $\mathcal{D}(f)$ splňující podmínku $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ musí platit

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow x_n = a).$$

Je tedy jasné, že pro $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$f(x_n) = f(a) \quad \forall n \geq n_0,$$

tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Domácí úkol

Dokažte pro případ, že a je hromadný bod definičního oboru funkce f .

Spojitost v bodě a omezenost

Z vlastnosti limity funkce a vztahu mezi limitou a spojitostí funkce se dá jednoduše dokázat:

Poznámka

Je-li funkce f v bodě $a \in D(f)$ spojitá, pak existuje $\mathcal{U}(a)$ tak, že funkce f je na množině $\mathcal{U}(a) \cap D(f)$ omezená.

... je-li totiž funkce spojitá v daném bodě, pak má v něm vlastní limitu, takže je na nějakém redukovaném okolí omezená (a dokonce je omezená i na celém okolí) ...

Jednostranná spojitost

Podobně jako jsme měli limitu zprava (zleva), budeme mít spojitost zprava (zleva).

Definice

(jednostranná spojitost) Necht' f je funkce, $a \in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap \mathcal{U}^+(a)$ (resp. $D(f) \cap \mathcal{U}^-(a)$). Říkáme, že funkce f je **spojitá zprava (resp. zleva)** v bodě a , jestliže

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(a \leq x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

(resp.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(a - \delta < x \leq a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)).$$

Poznámka

Pomocí symboliky okolí bodů lze definice psát takto. Funkce f je spojitá zprava v a , jestliže (a je hromadným bodem množiny $D(f) \cap \mathcal{U}^+(a)$)

$$(\forall \mathcal{U}_\epsilon(f(a)))(\exists \mathcal{U}_\delta^+(a))(\forall x \in D(f))(x \in \mathcal{U}_\delta^+(a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\epsilon(f(a))).$$

a f je spojitá zleva v a , jestliže (a je hromadným bodem množiny $D(f) \cap \mathcal{U}^-(a)$)

$$(\forall \mathcal{U}_\epsilon(f(a)))(\exists \mathcal{U}_\delta^-(a))(\forall x \in D(f))(x \in \mathcal{U}_\delta^-(a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\epsilon(f(a))).$$

Jednostranná spojitost jde, podobně jako spojitost, charakterizovat pomocí jednostranné limity.

Věta

*Nechť f je funkce, $a \in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap \mathcal{U}^+(a)$ (resp. $D(f) \cap \mathcal{U}^-(a)$). Funkce f je **spojitá zprava** (resp. **zleva**) v bodě a právě tehdy, když*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)).$$

Poznámka

Zformulujte a dokažte analogie Heineovy věty pro jednostrannou spojitost.

Věta

Nechť f je funkce, $a \in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap \mathcal{U}^+(a)$ i $D(f) \cap \mathcal{U}^-(a)$. Funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když je spojitá zprava i zleva.

Důkaz

Protože a je hromadný bod množin $D(f) \cap \mathcal{U}^+(a)$ i $D(f) \cap \mathcal{U}^-(a)$ (a tedy i $D(f) \cap \mathcal{U}(a)$), funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

tedy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

To je ekvivalentní s tím, že f je spojitá v bodě a zprava i zleva (viz obrázek).

Příklad

(a) Uvažujme funkci

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Tato funkce **není spojitá v bodě 0 ani zleva, ani zprava.**

(b) Dirichletova funkce

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

není spojitá v žádném bodě.

Dá se dokázat, že

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{pro } x \neq 0 (x > -1), \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

jsou **spojité v bodě 0**. Tato fakta pak **používáme v praktickém počítání limit**.

Spojitosť funkce na intervalu

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá na intervalu** $J \subset \mathbb{R}$, jestliže je spojitá v **každém vnitřním** bodě intervalu J a spojitá z příslušné strany v těch krajních bodech, které do něj patří.

Poznámka

S jistou dávkou nepřesnosti se dá říct, že spojitou funkci poznáme tak, že její graf lze nakreslit jednou nepřerušenou čarou.

Příklad

(Důležitý!!!) Uvažujme elementární funkce **polynomiální, racionální, exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické**. Na jakých intervalech jsou tyto funkce spojité? Co platí díky spojitosti např. pro

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x?$$

Spojitosť a aritmetické operace

Věta

Nechť f, g jsou funkce spojité v bodě $a \in D(f) \cap D(g)$. Pak jsou v bodě a spojité také funkce

$$f + g, f - g, f \cdot g, |f| \text{ a}$$

$$\frac{f}{g} \text{ za předpokladu } g(a) \neq 0.$$

Co lze říct o součtu, rozdílu, součinu, podílu spojitých funkcí na intervalu? Co lze říct o polynomech, racionálních funkcích na základě této věty a např. faktu, že mocninné funkce x^n jsou spojité na $\mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$ (dokažte! – inspirujte se příkladem ze začátku přednášky)?

Skládání spojitých funkcí

Věta

(o spojitosti složené funkce) Nechť h je spojitá v bodě a , g je spojitá v bodě $h(a)$. Pak $g \circ h$ je spojitá v a .

Co lze říct o složení dvou spojitých funkcí (např. $\sin(x^2 + 1)$)?

Domácí úkol

Zkuste dokázat tuto větu – inspirujte se důkazem následující věty.

Věta o limitě složené funkce II.

Následující věta je variantou věty o limitě složené funkce (z minulé přednášky).

Věta

(o limitě složené funkce II.) Necht' g, h jsou reálné funkce, $a \in \mathbb{R}^$ je hromadný bod definičního oboru funkce*

$$f = g \circ h,$$

existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \in \mathbb{R}$ a g je spojitá v bodě A . Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(\lim_{x \rightarrow a} h(x)) (= g(A)).$$

Důkaz

Bude vyžadován u zkoušky.

Poznámka

Tato druhá verze věty o limitě složené funkce nám například pomůže při výpočtu limity

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}.$$

Platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)}$$

(ze středoškolského vzorce $a^b = e^{a \ln b}$). Druhý výraz je podle předchozí věty roven výrazu

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x).$$

Platí tedy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}.$$

Příklad

Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení. Podle předchozí poznámky je tato limita (pokud existuje) rovna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x + e^x).$$

Stačí spočítat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{x}.$$

... pokračování příkladu

Platí

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x + e^x)}{x} &= \frac{\ln(1 + (x + e^x - 1))}{x} = \frac{\ln(1 + (x + e^x - 1))}{x + e^x - 1} \cdot \frac{x + e^x - 1}{x} \\ &= \frac{\ln(1 + (x + e^x - 1))}{x + e^x - 1} \cdot \left(1 + \frac{e^x - 1}{x}\right).\end{aligned}$$

Poslední výraz jde pro $x \rightarrow 0$ k číslu $1 \cdot (1 + 1) = 2$. Dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

Důležité vlastnosti spojitých funkcí

Věta

(Weierstrassova) Necht' je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak f nabývá na množině svého maxima a minima (tzn. existují $\alpha, \beta \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$f(\alpha) = \min\{f(x) : x \in \langle a, b \rangle\}, \quad f(\beta) = \max\{f(x) : x \in \langle a, b \rangle\}.$$

Následující věta má důležité důsledky pro existenci řešení rovnice

$$f(x) = 0.$$

Věta

(Bolzanova) Necht' je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$f(\xi) = 0.$$

Nespojitost

Rozlišujeme celkem tři druhy nespojitosti.

Definice

Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $\mathcal{D}(f)$. Říkáme, že f má **odstranitelnou nespojitost**, jestliže

(a) existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a přitom f není v bodě a definována, nebo

(b) existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a přitom

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a).$$

Poznámka

Tento druh nespojitosti lze odstranit vhodným definováním (případ (a)), případně predefinováním funkční hodnoty $f(a)$ (případ (b)).

Příklad

(a) Funkce

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0$$

má odstranitelnou nespojitost v bodě 0. Funkce

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

vzniklá z funkce f předefinováním v bodě $x = 0$ je již spojitá.

(b) Funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{pro } x \neq 2, \\ 1 & \text{pro } x = 2. \end{cases}$$

má odstranitelnou nespojitost bodě 2.

Definice

Necht' $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě a **nespojitosť 1. druhu (typu skok)**, jestliže existují obě vlastní jednostranné limity a platí

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Příklad

Funkce $\operatorname{sgn} x$ má v bodě 0 nespojitost 1. druhu.

Definice

(nespojítost 2. druhu) Necht' $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě a **nespojítost 2. druhu**, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje nebo je nevlastní.

Příklad

(a) Funkce

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0$$

má nespojítost 2. druhu v bodě $a = 0$.

(b) Funkce

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

má nespojítost 2. druhu v bodech $a = \pi/2 + k\pi$, pro $k \in \mathbb{Z}$.

Stejněměrná spojitost

Občas je potřeba vlastnosti silnější než je pouhá spojitost funkce.

Definice

Nechť f je funkce, $M \subset D(f)$. Řekneme, že f je stejněměrně spojitá na M , jestliže

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in M)(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon).$$

Tento pojem je globálního charakteru – tedy neexistuje pojem „stejněměrné spojitosti v bodě ...“

Následující věta vyjadřuje fakt, že pojem stejnoměrné spojitosti je silnější než pojem spojitosti.

Věta

Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na $J \subset D(f)$, pak je f na J spojitá.

Domácí úkol

Dokažte předchozí větu (téměř triviální).

Příklad

(1) Funkce $\sin x$ je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$.

Řešení. K libovolnému $\epsilon > 0$ hledáme δ tak, aby pro každé $x, x' \in \mathbb{R}$ platilo

$$|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Protože

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x'| &= 2 \left| \sin \frac{x - x'}{2} \cos \frac{x + x'}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x'}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{x - x'}{2} \right| = |x - x'|, \end{aligned}$$

za δ lze tedy volit například ϵ (nebo i jakékoliv jiné menší kladné číslo).

Příklad

(2) Uvažujme funkci

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

definovanou na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dokažte, že není stejnoměrně spojitá na $(0, 1]$.

Řešení. Uvažujme body

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad x'_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

pokračování příkladu

Pak

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x'_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{(2n+1)\pi} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) - 2n}{(4n^2 + 2n)\pi} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(4n^2 + 2n)\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(4n^2 + 2n)\pi} = 0,\end{aligned}$$

přitom

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = |\cos 2n\pi - \cos((2n+1)\pi)| = |1 - (-1)| = 2$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že například k číslu $\epsilon = 1$ nejsme schopni nalézt $\delta > 0$ tak, aby pro každou dvojici $x, x' \in D(f)$ platila implikace z definice stejnoměrné spojitosti. Stačí vzít $x = x_n, x' = x'_n$. Totiž $|x_n - x'_n|$ může být libovolně malá, přitom

$$|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Následující věta nám říká, za jakých podmínek je spojitá funkce dokonce stejnoměrně spojitá.

Věta

(Cantorova) Nechť je funkce f *spojitá na uzavřeném intervalu* $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak f je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

-  Kojecká, J., Kojecký, T.: Matematická analýza pro 1. semestr, VUP, Olomouc, 1997.
-  Krupková V., Fuchs, P.: Matematika 1, VUT, Brno, 2007 (dostupné v elektronické podobě)
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (I), Matfyzpress, Praha, 2004.
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (II), Matfyzpress, Praha, 2007.
-  Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU, Brno 2003.

+ elektronická skripta