

Matematická analýza pro informatiky I.

7. přednáška

Derivace funkce

Jan Tomeček
tomecek@inf.upol.cz
<http://aix-slx.upol.cz/~tomecek/index>

Univerzita Palackého v Olomouci

31. března 2011

Příklad

Uvažujme funkci $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Chceme najít rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $(0, f(0)) = (0, 1)$.

Řešení. Náš přístup je založen na myšlence, že tečna je přímka, ke které se „přibližují“ sečny grafu procházející bodem $(0, 1)$ a bodem (h, e^h) pro h „jdoucí k nule.“

Zásadním okamžikem je stanovení směrnice tečny na základě směrnic sečen. Máme důvod se domnívat, že je-li h dostatečně malé, pak výraz

$$\frac{e^h - 1}{h}$$

je velmi blízký směrnici tečny.

Po opakování slov **přibližují**, **dostatečně malé**, **blízký** vás možná napadne, že žhavým kandidátem pro směrnici tečny je právě číslo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Příklad

Uvažujme hmotný bod pohybující se (jedním směrem) po přímce. Označme symbolem $s(t)$ uraženou vzdálenost za časový interval $\langle 0, t \rangle$ ($t = 0$ bereme jako okamžik začátku pohybu). Můžeme tedy definovat funkci

$$s : \langle 0, T \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad (T > 0).$$

Bude nás zajímat **okamžitá rychlost** hmotného bodu v čase $t_0 \in (0, T)$. Víme, že průměrnou rychlost v časovém intervalu $\langle t_0, t_0 + \Delta t \rangle$ je rovna

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{t_0 + \Delta t - t_0}$$

Zřejmě, bude-li Δt hodně blízké nule, bude tento zlomek hodně blízký okamžité rychlosti. Opět použijeme pojem **limita funkce**, jako v předchozím příkladě.

Derivace funkce v bodě

Definice

Nechť f je funkce definovaná na nějakém okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu $a \in D(f)$ (tj. nechť a je **vnitřním bodem definičního oboru** funkce f). Řekneme, že funkce f má v bodě a derivaci, jestliže existuje limita

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

Tuto limitu nazýváme **derivací funkce f v bodě a** a značíme

$$f'(a), \frac{df(a)}{dx}, (f(x))'_{|x=a}, \dots$$

Je-li tato limita vlastní, mluvíme o **vlastní derivaci**, pokud je nevlastní, mluvíme o **nevlastní derivaci**.

Příklad

Vypočtěte $f'(0)$ je-li

(a) $f(x) = e^x$, (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Řešení. ad (a)

$$(e^x)'_{|x=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

ad (b)

$$(\sqrt[3]{x})'_{|x=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{0}}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} = \infty.$$

Jaké mají tyto dva příklady praktické geometrické důsledky?

Vztah mezi existencí derivace a spojitostí

Věta

*Nechť f je definovaná na okolí bodu $\mathcal{U}(a)$ ($a \in \mathbb{R}$) a existuje **vlastní** derivace $f'(a)$. Pak je funkce f v bodě a spojitá.*

Důkaz

Stačí dokázat, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, nebo-li $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = f'(a) \cdot 0.$$

Z existence nevlastní derivace již spojitost nevyplývá (viz dále funkci sgn).

Jednostranné derivace funkce v bodě

Definice

Nechť f je funkce definovaná na pravém (resp. levém) okolí $\mathcal{U}^+(a)$ (resp. $\mathcal{U}^-(a)$) bodu a . Řekneme, že funkce f má v bodě a **derivaci zprava (resp. zleva)** jestliže existuje limita

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \quad \left(\text{resp. } \lim_{t \rightarrow a^-} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \right).$$

Značíme $f'_+(a)$ (resp. $f'_-(a)$). Je-li tato limita vlastní – mluvíme o vlastní derivaci, pokud je nevlastní – mluvíme o nevlastní derivaci.

Co plyne z definic?

Poznámka

Z faktu, že derivace funkce v bodě je limita, okamžitě plyne spousta jejích vlastností. Například „Derivace funkce f v bodě a existuje právě tehdy když existují obě jednostranné derivace a jsou si rovny“ nebo „Existuje nejvýše jedna derivace“.

Příklady

(a) Vypočtěte $f'(x_0)$, kde $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (f je konstantní funkce).

Řešení. Platí

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c - c}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

(b) Vypočtěte $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ pro $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Řešení. Platí

$$f'_+(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{sgn} t - \operatorname{sgn} 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} = \infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{\operatorname{sgn} t - \operatorname{sgn} 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{-1}{t} = \infty,$$

Z toho plyne, že existuje dokonce i $f'(0) = \infty$.

(c) Vypočtete $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ pro $f(x) = |x|$.

Řešení. Platí

$$f'_+(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{|t| - |0|}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{t} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{|t| - |0|}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{-t}{t} = -1,$$

Z toho plyne, že $f'(0)$ neexistuje.

(d) Vypočtete $f'(x_0)$, kde $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$.

(e) Vypočtete $f'(x_0)$, kde $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

(f) Vypočtete $f'(x_0)$, kde $f(x) = \sin x$.

(g) Vypočtete $f'(x_0)$, kde $f(x) = \cos x$.

Věta

Nechť f , g jsou funkce mající vlastní derivace $f'(a)$, $g'(a)$ v bodě $a \in D(f) \cap D(g)$. Pak platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}, \quad (\text{je-li } g(a) \neq 0).$$

Důkaz

Dokážeme pouze druhou rovnost. Platí

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(a) &= \lim_{t \rightarrow a} \frac{(f \cdot g)(t) - (f \cdot g)(a)}{t - a} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)g(t) - f(a)g(a)}{t - a} \\&= \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)g(t) - f(a)g(t) + f(a)g(t) - f(a)g(a)}{t - a} \\&= \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \cdot g(t) + f(a) \frac{g(t) - g(a)}{t - a} \right) \\&= \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \cdot \lim_{t \rightarrow a} g(t) + f(a) \lim_{t \rightarrow a} \frac{g(t) - g(a)}{t - a} \\&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Ostatní rovnosti se dokáží podobně.

Věta

(o derivaci složené funkce) Mají-li funkce f, g vlastní derivace $f'(a)$, $g'(A)$, kde $A = f(a)$, pak funkce $g \circ f$ má vlastní derivaci v bodě a a platí

$$(g \circ f)'(a) = g'(A)f'(a) (= g'(f(a))f'(a)).$$

Nejprve chybný důkaz... a teď správný (aspoň jeho první část):

Důkaz

Nejprve předpokládejme, že platí

$$(\exists \mathcal{R}_\gamma(a))(\forall t \in \mathcal{R}_\gamma(a))(f(t) \neq f(a)) \quad (1)$$

kde γ je tak malé, že $g \circ f$ je definovaná na $\mathcal{U}_\gamma(a)$.

Pak pro každé $t \in \mathcal{R}_\gamma(a)$ platí

$$\frac{(g \circ f)(t) - (g \circ f)(a)}{t - a} = \frac{g(f(t)) - g(f(a))}{f(t) - f(a)} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}. \quad (2)$$

Zřejmě

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(t) - (g \circ f)(a)}{t - a} = (g \circ f)'(a),$$

pokud tato limita existuje a platí

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a).$$

Stačí vyšetřit

$$\frac{g(f(t)) - g(f(a))}{f(t) - f(a)} = \frac{g(f(t)) - g(A)}{f(t) - A}$$

na $\mathcal{R}_\gamma(a)$ (všimněte si, že tento výraz má pro $t \in \mathcal{R}_\gamma(a)$ smysl vždy – kvůli předpokladu (1)).

Snadno lze nahlédnout, že

$$\frac{g(f(t)) - g(A)}{f(t) - A} = (H \circ f)(t),$$

kde

$$H(y) = \frac{g(y) - g(A)}{y - A}.$$

Protože

$$\lim_{y \rightarrow A} H(y) = g'(A),$$

pak podle věty o limitě složené funkce (I. verze – ověřte, že jsou splněny její předpoklady) také

$$\lim_{t \rightarrow a} (H \circ f)(t) = g'(A) = g'(f(a)).$$

Tedy vzorec platí.

Nyní „stačí“ dokázat, že věta platí i v případě, že neplatí (1).

Věta

(o derivaci inverzní funkce) Necht' je f ryze monotonní (tj. rostoucí nebo klesající) a spojitá na $\mathcal{U}(a)$, $a \in D(f)$. Existuje-li vlastní $f'(a) \neq 0$ pak existuje $(f^{-1})'$ v bodě $A = f(a)$ a platí

$$(f^{-1})'(A) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(A))}.$$

Důkaz

Platí

$$(f^{-1})'(A) = \lim_{z \rightarrow A} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(A)}{z - A} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{t - a}{f(t) - f(a)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(t) - f(a)}{t - a}} = \frac{1}{f'(a)},$$

kde jsme použili substituci $z = f(t)$ (je to trochu ošizené... ale co se dá dělat...).

Příklad

Vypočtěte $(\arcsin y)'_{|y=y_0}$, $y_0 = \sin x_0$, kde $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Podle předchozí věty platí

$$(\arcsin y)'_{|y=y_0} = \frac{1}{(\sin x)'_{|x=x_0}} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Definice derivace funkce

Definice

Necht' má funkce f **vlastní derivaci v každém bodě** otevřené množiny $M \subset D(f)$. Pak derivací funkce f na M (stručně: derivací funkce f) rozumíme funkci, která každému $x \in M$ přiřadí derivaci funkce f v bodě x . Tuto funkci značíme f' , $\frac{df}{dx}$.

Příklad

Protože pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ platí $(x^n)'_{|x=x_0} = nx_0^{n-1}$, pro $n \in \mathbb{N}$, pak zřejmě funkce nx^{n-1} je derivací funkce x^n na $\mathbb{R}$. Zapisujeme to takto

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Poznámka

Z definice derivace (případně z věty o derivaci inverzní funkce) lze dokázat

$$(c)' = 0,$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0),$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1),$$

speciálně

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

atd.

Příklad

Vzhledem k předchozím větám a uvedeným „vzorcům“ pro derivace elementárních funkcí platí např.

$$(x^2 + \sin x + 1)' = (x^2)' + (\sin x)' + (1)' = 2x + \cos x + 0 = 2x + \cos x,$$

$$(3x^3 - \cos x)' = (3x^3)' - (\cos x)' = 9x^2 + \sin x,$$

$$(x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x + 1$$

$$(\sin(\ln x))' = \frac{d \sin y}{dy} \Big|_{y=\ln x} \cdot (\ln x)' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned} (\sin(\cos(\ln x)))' &= \frac{d \sin z}{dz} \Big|_{z=\cos(\ln x)} \cdot \frac{d \cos y}{dy} \Big|_{y=\ln x} \cdot (\ln x)' \\ &= \cos(\cos(\ln x)) \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Poznámka

Máme-li vypočítat derivaci funkce v konkrétním bodě, nejprve s využitím zmíněných vzorců a pravidel určíme derivaci funkce a pak, do takto získané funkce tento konkrétní bod dosadíme. Například hodnotu $(x^3)'_{|x=1}$ vypočteme tak, že nejprve zderivujeme

$$(x^3)' = 3x^2,$$

a pak dosadíme $x = 1$. Dostáváme $(x^3)'_{|x=1} = 3 \cdot 1^2 = 3$.

Derivace vyšších řádů

Definice

Necht' má funkce f vlastní derivaci na okolí $\mathcal{U}(a)$ (tzn. v každém bodě tohoto okolí) bodu $a \in D(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě a druhou derivaci, jestliže existuje limita

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t) - f'(a)}{t - a}.$$

Tuto limitu nazýváme druhou derivací funkce f v bodě a a značíme

$$f''(a), \frac{d^2 f}{dx^2}(a), f^{(2)}(a).$$

Definice

Má-li funkce f druhou (vlastní) derivaci v každém bodě otevřené množiny $M \subset D(f)$, pak **druhou derivací funkce f na množině M** (stručně: druhou derivací) rozumíme funkci

$$M \ni x \mapsto f''(x).$$

Značíme tuto funkci symbolem f'' .

Poznámka

Z definice je přímo vidět, že druhá derivace je rovna derivaci první derivace, tzn.

$$f'' = (f')'.$$

Podobným způsobem definujeme n -tou derivaci v bodě:

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f má vlastní $(n - 1)$ -ní derivaci v každém bodě z okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu $a \in D(f)$. Řekneme, že funkce f má **v bodě a n -tou derivaci**, jestliže existuje limita

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a)}{t - a}.$$

Tuto limitu nazýváme n -tou derivací funkce f v bodě a a značíme

$$f^{(n)}(a), \quad \frac{d^n f(a)}{dx^n}.$$

... a n -tou derivací:

Definice

*Má-li funkce f n -tou (vlastní) derivaci v každém bodě otevřené množiny $J \subset D(f)$, pak **n -tou derivací funkce f na množině M** (stručně: n -tou derivací) rozumíme funkci*

$$M \ni x \mapsto f^{(n)}(x).$$

Značíme tuto funkci symbolem $f^{(n)}$.

Příklad

Uvažujme funkci $f(x) = x^2 + 2 \sin(3x)$. Pak

$$f'(x) = (x^2 + 2 \sin(3x))' = 2x + 2 \cos(3x) \cdot 3 = 2x + 6 \cos(3x),$$

$$f''(x) = (f'(x))' = 2 + 6(-\sin(3x)) \cdot 3 = 2 - 18 \sin(3x),$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = -18(-\cos(3x)) \cdot 3 = 54 \cos(3x).$$

Malé o, asymptotická ekvivalence

Definice

Pro $a \in \mathbb{R}^*$ a f, g definované na $\mathcal{R}(a)$ píšeme

$$f = o(g) \quad \text{pro } x \rightarrow a, \quad \text{jestliže} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

$$f \sim g \quad \text{pro } x \rightarrow a, \quad \text{jestliže} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Příklad

(1) Platí $x^4 = o(x^3)$ pro $x \rightarrow 0$, protože

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

(2) Platí $\sin x \sim x$ pro $x \rightarrow 0$, protože $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Diferenciál funkce

Věta

Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ **vlastní** derivaci rovnu A , pak platí

$$f(x) - f(a) - A(x - a) = o(x - a), \quad x \rightarrow a. \quad (3)$$

Naopak, platí-li (3), pak má funkce f derivaci v bodě a a platí $A = f'(a)$.

Důkaz

Platí

$$\begin{aligned} f'(a) = A \in \mathbb{R} &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A \\ &\stackrel{A \in \mathbb{R}}{\iff} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{x - a} = 0 \\ &\iff f(x) - f(a) - A(x - a) = o(x - a) \text{ pro } x \rightarrow a. \end{aligned}$$

Definice

Diferenciálem funkce f v bodě a rozumíme **lineární funkci**

$df(a)(t) = At$ (pro $A \in \mathbb{R}$), pro kterou platí

$$f(a+t) - f(a) - df(a)(t) = o(t) \quad \text{pro } t \rightarrow 0.$$

Z předchozí věty okamžitě plyne následující fakt.

Věta (o diferenciálu)

Funkce f má v bodě a diferenciál právě tehdy když má v tomto bodě vlastní derivaci a v takovém případě platí $A = f'(a)$.

Poznámka

Jinak řečeno, existence diferenciálu v bodě a je ekvivalentní s existencí vlastní derivace. Mohlo by se tedy zdát, že je pojem diferenciálu zbytečný, protože pokud existuje, pak je dán předpisem

$$df(a)(t) = f'(a)t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Skutečně, tento pojem nám u funkce jedné proměnné nepřináší nic moc nového – velkou důležitosti bude mít až **diferenciál funkce více proměnných**. Důležitý je také jeho geometrický význam.

Vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí

Definice

Řekneme, že funkce f je **neklesající (rostoucí) v bodě** $a \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $\mathcal{R}_\gamma(a)$ tak, že

$$f(x) \geq f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^+(a) \quad \text{a} \quad f(x) \leq f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^-(a)$$

$$(f(x) > f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^+(a) \quad \text{a} \quad f(x) < f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^-(a)).$$

Řekneme, že funkce f je **nerostoucí (klesající) v bodě** $a \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $\mathcal{R}_\gamma(a)$ tak, že

$$f(x) \leq f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^+(a) \quad \text{a} \quad f(x) \geq f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^-(a)$$

$$(f(x) < f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^+(a) \quad \text{a} \quad f(x) > f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^-(a)).$$

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ *lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje $\mathcal{R}_\gamma(a)$ tak, že

$$f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)) \quad \text{pro } x \in \mathcal{R}_\gamma(a).$$

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ *ostré lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje $\mathcal{R}_\gamma(a)$ tak, že

$$f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)) \quad \text{pro } x \in \mathcal{R}_\gamma(a).$$

Lokální maximum a minimum souhrnně nazýváme lokální extrém.
Ostré lokální maximum a minimum souhrnně nazýváme ostré lokální extrém.

Příklad

Funkce $f(x) = x^2$ má ostré lokální minimum v bodě $x = 0$.

Věta

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci (vlastní nebo nevlastní). Pak
(I) je-li $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), je funkce f v bodě a rostoucí (klesající),
(II) má-li f v bodě a lokální extrém, je $f'(a) = 0$.

Příklad

Opačná implikace k (I) neplatí. Například funkce $f(x) = x^3$ je v bodě $x = 0$ rostoucí, přitom $f'(0) = 0$.

Poznámka

Pro danou funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$ budeme definovat výrazy

$$\inf_{\langle a, b \rangle} f, \quad \sup_{\langle a, b \rangle} f, \quad \min_{\langle a, b \rangle} f, \quad \max_{\langle a, b \rangle} f.$$

Definice – viz tabuli.

Věta

(o omezenosti spojité funkce na kompaktním intervalu) Každá *spojitá funkce na intervalu* $\langle a, b \rangle$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)

(I) je *omezená* (tzn. $-\infty < \inf_{\langle a, b \rangle} f \leq \sup_{\langle a, b \rangle} f < \infty$),

(II) nabývá na intervalu $\langle a, b \rangle$ svého *minima a maxima*, tzn. existují $x_{\min}, x_{\max} \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$f(x_{\min}) = \min_{\langle a, b \rangle} f, \quad f(x_{\max}) = \max_{\langle a, b \rangle} f.$$

Důkaz

(nebude vyžadován u zkoušky) Provedeme pouze (I). Kdyby f nebyla na $\langle a, b \rangle$ omezená, pak bychom našli posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů takových, že $x_n \in \langle a, b \rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a

$$|f(x_n)| \geq n. \quad (4)$$

Protože je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost, existuje podle Weierstrassovy věty (2. přednáška) podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ mající vlastní limitu x_0 . Protože $a \leq x_{k_n} \leq b$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, zřejmě $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Ze spojitosti funkce f plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(x_0).$$

Z předpokladu (4) ale plyne $|f(x_{k_n})| \geq k_n \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$, tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \infty.$$

To je ovšem spor.

Trojice vět o střední hodnotě diferenciálního počtu

Věta

(Rolle) Nechť f je funkce

(I) *spojitá na $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,*

(II) *f má v každém bodě z $\langle a, b \rangle$ derivaci (i nevlastní),*

(III) *$f(a) = f(b)$.*

Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz

Ze spojitosti funkce f a předchozí věty plyne existence čísel $\min_{\langle a, b \rangle} f$ a $\max_{\langle a, b \rangle} f$. Je-li $\min_{\langle a, b \rangle} f = \max_{\langle a, b \rangle} f$, pak f je zřejmě konstantní funkce. Pak $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$, tzn. ξ lze libovolně zvolit z intervalu (a, b) . Je-li $\min_{\langle a, b \rangle} f < \max_{\langle a, b \rangle} f$, pak funkce f nabývá v alespoň jednom bodě $\xi \in (a, b)$ lokální extrém. Pak $f'(\xi) = 0$.

Věta

(Lagrange, o přírůstku, o střední hodnotě diferenciálního počtu) Nechť f je funkce

(I) *spojitá na* $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

(II) f má v každém bodě z $\langle a, b \rangle$ *derivaci* (i nevlastní).

Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ (tzn. } f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)\text{).}$$

Důkaz

Definujeme funkci

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ověříme, že funkce Φ splňuje předpoklady Rolleovy věty.

Poznámka

K pochopení a zapamatování této věty může posloužit její geometrická interpretace.

Věta

(Cauchy, zobecněná věta o přírůstku) Necht' f, g jsou funkce

(I) **spojité na $\langle a, b \rangle$** , $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

(II) f má v každém bodě z $\langle a, b \rangle$ **derivaci** (i nevlastní),

(III) g má v každém bodě z $\langle a, b \rangle$ **nenulovou vlastní derivaci**.

Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Důkaz

Kdyby $g(b) = g(a)$, pak by z Rolleovy věty (s využitím faktu, že g je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a má na (a, b) derivaci) plynula existence $\bar{\xi} \in (a, b)$ takového, že $g'(\bar{\xi}) = 0$. To je ovšem ve sporu s třetím předpokladem dokazované věty – tedy $g(b) - g(a) \neq 0$. Položíme

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Slavné l'Hospitalovo pravidlo

Věta

(l'Hospitalovo pravidlo) Necht' $a \in \mathbb{R}^*$ a f, g mají na nějakém redukovaném okolí $\mathcal{R}(a)$ první derivace, přičemž $g' \neq 0$ na $\mathcal{R}(a)$. Necht' je navíc splněna jedna z následujících podmínek:

(I) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathcal{R}(a)$,

(II) $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$.

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, pak také platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Věta platí i pro jednostranné limity.

Na zkoušce není potřeba znát přesné tvrzení této věty. Stačí ji umět použít a uvědomit si úskalí jejího použití – viz následující slajd.

Poznámka

(DŮLEŽITÁ) Předchozí věta nám umožní velmi efektivně počítat neurčité výrazy $0/0$ nebo ∞/∞ . Máme-li vypočítat limitu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$, pak stačí abychom čitatele a jmenovatele zderivovali a určili hodnotu limity $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$ – pokud je to vhodné – derivováním se ovšem výraz často mnohem zjednoduší – viz příklady. Oprávněnost použití této věty je ovšem nutné vždy ověřit. Navíc si všimněte faktu, že pokud nebude existovat $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$, pak tato věta **VŮBEC NIC** neříká o limitě $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$. Tento fakt se vyjadřuje symbolem $\overset{!}{=} H$.

Příklad

Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}.$$

Řešení. K výpočtu použijeme opakovaně l'Hospitalova pravidla – protože po jeho první aplikaci dostaneme v našem příkladě opět neurčitý výraz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{3x^2 \cos^2 x} \\ &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cos^2 x \sin x}{6x \cos^2 x - 6x^2 \sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{-3 \cos x}{6 \cos x - 6x \sin x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

-  Kojecká, J., Kojecký, T.: Matematická analýza pro 1. semestr, VUP, Olomouc, 1997.
-  Krupková V., Fuchs, P.: Matematika 1, VUT, Brno, 2007 (dostupné v elektronické podobě)
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (I), Matfyzpress, Praha, 2004.
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (II), Matfyzpress, Praha, 2007.
-  Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU, Brno 2003.

+ elektronická skripta