

Matematická analýza pro informatiky I.

8. přednáška

Aplikace diferenciálního počtu

Jan Tomeček
tomecek@inf.upol.cz
<http://aix-slx.upol.cz/~tomecek/index>

Univerzita Palackého v Olomouci

31. března 2011

Taylorův rozvoj funkce

Z kapitoly o diferenciálu funkce plyne, že pokud má funkce v bodě a vlastní derivaci, platí

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + o(t), \quad \text{pro } t \rightarrow 0,$$

kde $\lim_{t \rightarrow 0} o(t)/t = 0$ (tato podmínka je klíčová). Substitucí $x = a + t$ to lze zapsat jako

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a), \quad \text{pro } x \rightarrow a$$

(kde $\lim_{x \rightarrow a} o(x-a)/(x-a) = 0$).

Můžeme si tedy dovolit psát

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \tag{1}$$

pro x „dostatečně blízko“ k a . Tohoto faktu se používá při přibližných výpočtech. Na pravé straně totiž máme výraz, k jehož vyhodnocení stačí pouze sčítat a násobit.

Příklad

Určeme přibližnou hodnotu čísla $e^{0,01}$. Pak můžeme použít „vzorce“ (1) takto. Položíme

$$a = 0, \quad x = 0,01, \quad f(x) = e^x.$$

Pak

$$e^{0,01} \approx e^0 + (e^x)'|_{x=0} \cdot (0,01 - 0) = 1 + 1 \cdot 0,01 = 1,01.$$

Tento přibližný výpočet má ovšem jednu velkou nevýhodu. *Není-li splněna podmínka blízkosti x k bodu a , vzniklá chyba úplně znehodnotí výsledek.* Například vypočítejme e^3 pomocí vzorce (1), kde vezmeme

$$a = 0, \quad x = 3, \quad f(x) = e^x.$$

pokračování příkladu

Vzorec nám dává

$$e^0 + (e^x)'|_{x=0} \cdot (3 - 0) = 1 + 1 \cdot 3 = 4,$$

přitom

$$e^3 \approx 20,0855.$$

Má se tedy smysl ptát, jestli by se náš vzorec nedal nějakým způsobem vylepšit. Naším požadavkem by opět bylo, abychom k jeho vyčíslení vystačili s operacemi sčítání a násobení.

Lepší „vzorec“ na aproximaci?

Budeme se ptát po **polynomu** $p(x)$ **stupně** $k \leq n$, pro který platí

$$f(x) = p(x) + o((x - a)^n), \quad \text{pro } x \rightarrow a.$$

Všimněte si, že čím větší je n , tím menší je výraz $o((x - a)^n)$ pro pevně zvolené x , které je dostatečně blízko číslu a .

Příklad

Platí

x	10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}
$x^2 = o(x)$	10^{-2}	10^{-6}	10^{-10}
$x^3 = o(x^2)$	10^{-3}	10^{-9}	10^{-15}
$x^6 = o(x^5)$	10^{-6}	10^{-18}	10^{-30}

Taylorův polynom

Věta

Nechť funkce f má v bodě a vlastní derivaci až do řádu n včetně, $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje jediný polynom $P_n(x)$ stupně nejvýše n (nebo nulový polynom) tak, že platí

$$f(x) - P_n(x) = o((x - a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

Polynom P_n je dán vzorcem

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k.$$

Definice

Polynom P_n z předchozí věty nazýváme **Taylorovým polynomem n -tého stupně v bodě a** .

Příklad

Uvažujme funkci $f(x) = e^x$. Pak snadno vypočítáme Taylorovy polynomy $P_0, \dots, P_5$ funkce f v bodě $x = 0$. Platí

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \quad P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.$$

Pak

$$P_0(3) = 1, \quad P_1(3) = 4, \quad P_2(3) = 8,5, \\ P_3(3) = 13, \quad P_4(3) = 16,375, \quad P_5(3) = 18,4,$$

přitom $e^3 \approx 20,0855$.

pokračování příkladu

Možná nás napadne otázka, zda-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(3) = e^3,$$

a pokud to platí, jak je tato konvergence rychlá – nebo jinak: jak velké stačí vzít n abychom byli s výsledkem spokojeni (tedy např. aby výsledek byl s přesností na žádaný počet desetinných míst).

Zformulujme tento problém obecně. Ptáme se, za jakých podmínek platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

pro dané $x \in D(f)$. Označme

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$$

a nazveme tuto funkci **Taylorovým zbytkem funkce f po n -tém členu**. Zřejmě platí

Věta

Pro $x \in D(f)$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Věta o zbytku

Abychom mohli říct něco opravdu užitečného, je potřeba vyslovit následující větu.

Věta

(O zbytku) Necht' $n \in \mathbb{N}$, funkce f má na intervalu J s koncovými body a a x *vlastní derivace až do $(n+1)$ -ního řádu* (v bodech a a x předpokládáme existenci jednostranných derivací). Necht' funkce φ je *na J spojitá*, existuje *vlastní $\varphi'(t) \neq 0$* pro každý vnitřní bod t intervalu J . Pak *existuje $\xi \in J$* tak, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - \xi)^n}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi). \quad (2)$$

pokračování tvrzení věty o zbytku

Jestliže položíme $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$ pak dostáváme tzv. **Lagrangeův tvar zbytku**

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

a pro $\varphi(t) = t$ dostáváme tzv. **Cauchyův tvar zbytku**

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - \xi)^n (x - a)}{n!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Důkaz

Vezmeme libovolně ale pevně $x > a$ (pro $x < a$ podobně). Definujeme funkci proměnné t

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k, \quad t \in \langle a, x \rangle$$

(tedy $D(F) = \langle a, x \rangle$). Platí

$$F(x) = 0, \quad F(a) = R_{n+1}(x),$$

$$\begin{aligned}
F'(t) &= -\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k \right) = -\frac{d}{dt} \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!} (x-t) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n \right) = - \left(f'(t) + f''(t)(x-t) - f'(t) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} \right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n.
\end{aligned}$$

Protože F a φ splňují podmínky Cauchyovy věty (minulá přednáška) existuje $\xi \in (a, x)$ tak, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Po dosazení funkce F a derivace $F'(\xi)$ do této rovnosti dostaneme vzorec (2). □

Příklad

Uvažujme $f(x) = e^x$, $a = 0$. Platí

$$f^{(k)}(x) = e^x, \quad \text{tedy } f^{(k)}(0) = 1, \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Pak

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Uvažujme pevné $x \neq 0$. Podle předchozí věty (Lagrangeův tvar zbytku) existuje ξ ležící mezi 0 a x tak, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Pokračování důkazu...

Proto

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Z toho dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = e^x.$$

Např. pro $x = 3$ jsme dokázali

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(3) = e^3.$$

Poznámka

Podobně lze postupovat i u jiných funkcí, např.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad \text{pro } x \rightarrow 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad \text{pro } x \rightarrow 0,$$

atd. . . – tzv. **Maclaurinovy vzorce** (= Taylorovy vzorce pro $a = 0$, viz literaturu).

Průběh funkce

Často býváme postaveni před problém vyšetřit průběh zadané funkce (tzn. určení vlastností této funkce jako je monotonie, určení lokálních extrémů, apod.). V dnešní době nám k tomu účelu poslouží různé matematické programy (např. Maple, Mathematica, Matlab, Octave, apod.). Ale není špatné umět tyto vlastnosti určit pomocí tužky a papíru. K tomu nám může posloužit diferenciální počet.

Monotónnost funkce

Na druhé přednášce jsme mluvili o pojmu monotónnosti funkce na intervalu (na množině) a na minulé přednášce jsme zmínili pojem monotónnosti funkce v bodě. Mezi pojmy „monotonní na intervalu“ a „monotonní v bodě“ platí následující vztahy.

Věta

*Funkce je neklesající, rostoucí, nerostoucí, klesající **na intervalu J právě tehdy, když je neklesající, rostoucí, nerostoucí, klesající v každém bodě z intervalu J .***

Monotónnost a derivace

Věta

Nechť je funkce f **spojitá** v bodě $a \in \mathbb{R}$.

(I) Je-li f **rostoucí (klesající)** na $\mathcal{R}^-(a)$ a **klesající (rostoucí)** na $\mathcal{R}^+(a)$, pak má f v bodě a **ostré lokální maximum (minimum)**.

(II) Je-li $f'(x) \geq 0$ (> 0) v $\mathcal{R}^-(a)$ a $f'(x) \leq 0$ (< 0) v $\mathcal{R}^+(a)$, pak má f v bodě a **lokální maximum (ostré lokální maximum)**. Je-li $f'(x) \leq 0$ (< 0) v $\mathcal{R}^-(a)$ a $f'(x) \geq 0$ (> 0) v $\mathcal{R}^+(a)$, pak má f v bodě a **lokální minimum (ostré lokální minimum)**. Je-li $f'(x) < 0$ (**nebo** > 0) v $\mathcal{R}(a)$, pak f **nemá** v bodě a **lokální extrém**.

(III) Nechť pro nějaké přirozené $n \geq 2$ je $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Je-li n **sudé**, pak f **má** v bodě a **ostrý lokální extrém**, a to **maximum pro** $f^{(n)}(a) < 0$ a **minimum pro** $f^{(n)}(a) > 0$. Je-li n **liché**, pak f **nemá** v bodě a **lokální extrém**. Pro $f^{(n)}(a) > 0$ (< 0) je f v a **rostoucí (klesající)**.

Příklad

Vyšetřete intervaly monotonnosti funkcí $f(x) = x^5$, $g(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$, a určete lokální extrémy.

Řešení. Uvažujme funkci $f(x) = x^5$, $D(f) = \mathbb{R}$. Pro derivaci platí

$$f'(x) = 5x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$f'(x) > 0 \iff x \neq 0,$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0,$$

$$f'(x) < 0 \text{ pro žádné } x.$$

Protože f je v bodě $x = 0$ spojitá a je rostoucí na $\mathcal{R}^+(0)$ i $\mathcal{R}^-(0)$, pak podle předchozí věty je funkce v 0 rostoucí. Funkce f je tedy rostoucí na $\mathbb{R}$.

pokračování příkladu...

Uvažujme funkci $g(x) = x^4$. Platí

$$g'(x) = 4x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$g'(x) > 0 \iff x > 0,$$

$$g'(x) = 0 \iff x = 0,$$

$$g'(x) < 0 \iff x < 0,$$

Protože funkce g je v bodě $x = 0$ spojitá a je rostoucí na $\mathcal{R}^+(0)$ a klesající na $\mathcal{R}^-(0)$, má funkce g v $x = 0$ ostré lokální minimum.

Příklad

Vyšetříme chování funkcí $f(x) = x^5$ a $g(x) = x^4$ v bodě $x = 0$ jiným způsobem. Tentokrát nebudeme řešit algebraické nerovnice, ale budeme počítat derivace vyšších řádů. Pro funkci f platí

$$f'(x) = 5x^4, \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = 20x^3, \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = 60x^2, \quad f'''(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = 120x, \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

$$f^{(5)}(x) = 120, \quad f^{(5)}(0) = 120 > 0.$$

Z předchozí věty (části (III)) vyplývá, že f je v bodě $x = 0$ rostoucí.

pokračování příkladu...

Pro funkci g platí

$$g'(x) = 4x^3, \quad g'(0) = 0,$$

$$g''(x) = 12x^2, \quad g''(0) = 0,$$

$$g'''(x) = 24x, \quad g'''(0) = 0,$$

$$g^{(4)}(x) = 24, \quad g^{(4)}(0) = 24 > 0,$$

Z předchozí věty (části (III)) vyplývá, že f má v bodě $x = 0$ ostré lokální minimum.

Konkávnost, konvexnost funkce, inflexní body

Definice

Nechť funkce f je definovaná na $\mathcal{U}(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že přímka $y = f(a) + k(x - a)$ je **tečnou ke grafu funkce f v bodě a** , jestliže

$$f(x) - f(a) - k(x - a) = o(x - a), \quad \text{pro } x \rightarrow a$$

(kde $\lim_{x \rightarrow a} o(x - a)/(x - a) = 0$).

Poznámka

Z věty o diferenciálu z předchozí přednášky (slajd 29) vidíme, že graf funkce f má tečnu o rovnici $y = f(a) + k(x - a)$ právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(a)$ a platí $k = f'(a)$. Rovnice tečny je tedy ve tvaru

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Definice

(1) Řekneme, že funkce f je v bodě a **ryze konvexní (ryze konkávní)**, jestliže existuje $\mathcal{R}(a)$ tak, že

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \quad \left(f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \right). \quad (3)$$

(2) Řekneme, že bod a je **inflexním bodem** funkce f , jestliže v $\mathcal{R}^+(a)$ platí jedna z nerovností z (3) a v $\mathcal{R}^-(a)$ platí nerovnost opačná.

(3) Platí-li v (3) neostré nerovnosti mluvíme o konvexnosti (konkávnosti) funkce f v bodě a , resp. o slabém inflexním bodě funkce.

Definice

Řekneme, že funkce je (ryze) konkávní, resp. konvexní **na intervalu** J , jestliže je (ryze) konkávní resp. konvexní v každém bodu z intervalu J .

Příklad

Funkce $f(x) = \sin x$ je ryze konvexní na $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, ryze konkávní na intervalech $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ a body $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ jsou inflexní body.

Věta

Je-li $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$), je funkce f v bodě a *ryze konvexní* (*ryze konkávní*).

Je-li a inflexní bod funkce f a $f''(a)$ existuje, pak $f''(a) = 0$.

Poznámka

Inflexní bod poznáme tedy tak, že v něm druhá derivace (pokud existuje) mění znaménko.

Asymptoty

Definice

(1) Necht' f je definovaná na otevřeném intervalu (a, b) , $b \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \infty(-\infty)$. Pak říkáme, že f má v bodě b **vertikální asymptotu**.

(2) Necht' f je definovaná na otevřeném intervalu (a, b) , $a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty(-\infty)$. Pak říkáme, že f má v bodě a **vertikální asymptotu**.

Příklad

Funkce $f(x) = 1/x$ má v bodě $x = 0$ vertikální asymptotu.

Definice

Nechť f je definovaná na (a, ∞) . Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptotou funkce f pro $x \rightarrow \infty$** , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + q)) = 0.$$

Podobně definujeme asymptotu pro $x \rightarrow -\infty$.

Věta

Přímka daná rovnicí $y = kx + q$ je asymptotou funkce f pro $x \rightarrow \pm\infty$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

Úlohou najít průběh funkce se rozumí sestavení přibližného grafu funkce, který by dal dostatečnou představu o jejím chování. Při řešení této úlohy postupujeme většinou takto:

- 1 Určení definičního oboru, případně nulové body funkce,
- 2 intervaly spojitosti, body nespojitosti, limity v krajních bodech definičního oboru, vertikální asymptoty
- 3 sudost, lichost, periodičnost
- 4 určení první derivace funkce – její definiční obor, určení intervalů monotónnosti, určení lokálních extrémů,
- 5 určení druhé derivace funkce – definiční obor, určení intervalů konkávnosti, konvexnosti, inflexní body,
- 6 asymptoty.

Příklad

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

Řešení. (1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Bod $x = 0$ je jediný nulový bod funkce.
(2) Funkce je spojitá na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$. Funkce má nespojitosti v bodech $x = -1$ a $x = 1$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \infty,$$

tedy funkce f má v bodech $x = 1$, $x = -1$ nespojitosti druhého druhu. Navíc z limit plyne, že funkce f má vertikální asymptoty $x = -1$, $x = 1$.

(3) Platí

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

tedy funkce f je sudá. Není lichá ani periodická.

(4) Platí

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$D(f') = D(f)$. Určíme, na jaké množině je funkce rostoucí, tj. řešíme nerovnici

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0, \\ \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} &< 0, \\ x &< 0 \wedge x \neq -1. \end{aligned}$$

Funkce je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$, klesající na $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. V bodě $x = 0$ je funkce spojitá tedy má v něm ostré lokální minimum, $f(0) = 0$.

(5) Platí

$$f''(x) = 2 \frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3},$$

$D(f'') = D(f)$. Určíme na jaké množině je funkce konvexní, tj. řešíme nerovnici

$$f''(x) > 0,$$

$$2 \frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3} > 0,$$

$$\frac{1}{(x^2 - 1)^3} > 0,$$

$$x^2 - 1 > 0,$$

$$|x| > 1.$$

Funkce je tedy konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a snadno se přesvědčíme, že je konkávní na intervalu $(-1, 1)$. Funkce nemá inflexní body ($x = \pm 1$ nemohou být inflexní body – v těch funkce není definovaná).

(6) Hledáme asymptotu pro $x \rightarrow \infty$. Pokud existuje asymptota o rovnici $y = kx + q$, pak

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1.$$

Tedy $y = 1$ je rovnice asymptoty funkce pro $x \rightarrow \infty$. Podobně spočítáme, že $y = 1$ je rovnice asymptoty funkce i pro $x \rightarrow -\infty$. Z těchto údajů již můžeme snadno načrtnout graf funkce.

Toto byla vyčerpávající analýza průběhu funkce. Často nás ovšem zajímá pouze vyšetření extrémů funkce. Například (převzato z textu Krupka, Málek: *Matematická analýza I.,II.*):

Příklad

(Problém šikovního strýčka) Předpokládejme, že jste šikovný strýček. Váš synovec za vámi přijde s následujícím úkolem: Chtěl by z obdélníkového kusu plechu o rozměrech 50×30 centimetrů udělat krabici bez víka s co možná největším objemem. Vaším úkolem je tedy zjistit, jak moc je nutno plech nastříhnout, aby z něj utvořená krabice měla největší objem.

Poslední příklad lze řešit pomocí této věty (která shrnuje poznatky z této a minulé přednášky).

Věta

Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak je funkce na tomto intervalu omezená a nabývá na něm maxima i minima.

Přitom bod maxima (resp. minima) je nabyt buď v krajních bodech intervalu, ve stacionárním bodě funkce f nebo ve vnitřním bodě, ve kterém nemá funkce f derivaci.

-  Kojecká, J., Kojecký, T.: Matematická analýza pro 1. semestr, VUP, Olomouc, 1997.
-  Krupková V., Fuchs, P.: Matematika 1, VUT, Brno, 2007 (dostupné v elektronické podobě)
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (I), Matfyzpress, Praha, 2004.
-  Kopáček J.: Matematická analýza nejen pro fyziky (II), Matfyzpress, Praha, 2007.
-  Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU, Brno 2003.

+ elektronická skripta