

Matematická analýza pro informatiky I.

9. přednáška

Diferenciální počet funkcí více proměnných (I)

Jan Tomeček
jan.tomecek@upol.cz
<http://aix-slx.upol.cz/~tomecek/index>

Univerzita Palackého v Olomouci

12. dubna 2011

Osvěžení pojmů z teorie funkcí více proměnných

- funkce více proměnných
- hladina funkce
- operace s funkcemi více proměnných, skládání
- elementární funkce více proměnných (lineární, kvadratické formy)

Limita funkce více proměnných

Podobně jako u funkce jedné proměnné můžeme definovat limitu. Jak už víme, k tomu je třeba nejprve definovat **vzdálenost mezi prvky z $\mathbb{R}^N$** . Výhradně budeme používat **euklidovskou metriku** (pomocí ní pak definujeme **okolí $\mathcal{U}$** a **redukované okolí $\mathcal{R}$**).

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)'$, $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **limitu A** , jestliže

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(x \in \mathcal{R}_\delta(a) \implies |f(x) - A| < \epsilon).$$

Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Srovnajte s limitou funkce jedné proměnné! Zkuste nadefinovat nevlastní limitu $\pm\infty$.

Pro limitu funkce více proměnných budou platit podobné věty jako pro funkci jedné proměnné, např.:

Domácí úkol

Dokažte: Funkce f může mít v bodě $a \in \mathcal{D}(f)'$ nejvýše jednu limitu.

Heineho věta

Dále platí zobecnění Heineho věty - srovnejte s funkcí jedné proměnné! (Pokuste se o důkaz.)

Věta

(Heine) Necht' $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in \mathcal{D}(f)'$. Pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ *právě tehdy, když* pro každou posloupnost $\{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(f) \setminus \{a\}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{[n]} = a \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{[n]}) = A.$$

Aritmetika limit funkcí

Platí i podobné věty o aritmetice limit...

Věta

Nechť f a g jsou reálné funkce v $\mathbb{R}^N$ a existují limity

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in \mathbb{R}$$

a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha A,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\text{pokud } B \neq 0).$$

a mnohé další věty jako např. věta o třech limitech, o limitě složeného zobrazení... viz literaturu.

Limita funkce vzhledem k množině

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^N$. Má-li restrikce $f|_{M \cap \mathcal{D}(f)}$ v bodě $a \in (M \cap \mathcal{D}(f))'$ limitu A , říkáme, že A je **limita funkce f v bodě a vzhledem k množině M** a píšeme

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = A.$$

Poznámka

Uvědomme si, co tyto pojmy znamenají pro $N = 1$. Uvažujme limitu funkce $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě a vzhledem k množině $M = (a, \infty)$. Rozmyslete si, že se vlastně jedná o jednostrannou limitu

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x).$$

Věta

Necht' $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $X, Y \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \mathcal{D}(f)' \cap X' \cap Y'$. Existuje-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, pak existují i limity

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in Y}} f(x)$$

a jsou rovny A .

Důsledek této věty nám pomůže při dokazování neexistenci limity funkce.

Důsledek

Jestliže existují $X, Y \subset \mathbb{R}^N$ takové, že $a \in X' \cap Y'$ a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in Y}} f(x),$$

pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ neexistuje.

Spojitosť funkce

Podobně jako u funkce jedné reálné proměnné budeme definovat spojitost.

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je v bodě a spojitá, jestliže

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(x \in \mathcal{U}_\delta(a) \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in M \subset \mathcal{D}(f)$. Je-li restrikce $f|_M$ v bodě a spojitá, říkáme, že funkce f je spojitá v bodě a vzhledem k množině M .

Uvědomte si, co tyto pojmy znamenají pro $N = 1$. Definice spojitosti funkce v bodě odpovídá v tomto případě přesně definici spojitosti funkce jedné proměnné v bodě. Uvažujme spojitost funkce f vzhledem k množině $M = \langle a, \infty \rangle$. Zřejmě se jedná o spojitost funkce f v bodě a zprava.

Poznámka

Z definic plyne: Je-li funkce f spojitá v bodě $a \in M \subset \mathcal{D}(f)$, pak je i funkce $f|_M$ spojitá v bodě a .

Z toho okamžitě plyne: Je-li $a \in M \subset \mathcal{D}(f)$ a funkce $f|_M$ není spojitá v bodě a , pak není spojitá ani funkce f v bodě a .

Příklad

Je dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ukážeme, že tato funkce není spojitá v bodě $(0, 0)$. Uvažujme restrikci funkce f na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathcal{D}(f) : y = x\},$$

pro přehlednost označíme $g = f|_M$.

Pokračování příkladu...

Pak zřejmě

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } (x, y) \in M \setminus (0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Je vidět, že funkce g není spojitá v $(0, 0)$, tedy podle předchozí poznámky nemůže být spojitá ani funkce f .

Následující věta nám dává jednoduchý návod, jak určit zda je funkce spojitá v daném bodě. (nebude vyžadována u zkoušky)

Věta

Nechť $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Jestliže existuje $k > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí

$$|f(x) - f(a)| \leq k\rho(x, a),$$

pak f je spojitá funkce v bodě a .

Důkaz

Vezmeme $\epsilon > 0$ libovolné a položíme $\delta = \epsilon/k$. Pak pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ takové, že $\rho(x, a) < \delta$ platí

$$|f(x) - f(a)| \leq k\rho(x, a) < k\delta = k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon.$$

Domácí úkol

Z předchozí věty se dá lehce dokázat, že i -tá projekce Π_i ($i = 1, \dots, N$) a konstantní funkce je spojitá v každém bodě z $\mathbb{R}^N$.

Příklad

Je dána funkce $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{pro } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Pro $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right| &= \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{y^2} \sqrt{z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho_3((x, y, z), (0, 0, 0)). \end{aligned}$$

Položíme $k = 1$ a použijeme předešlou větu.

Vztah limity a spojitosti

Mezi spojitostí a limitou funkce více proměnných je (podobně jako u funkce jedné proměnné) velmi těsný vztah.

Věta

Necht' $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathcal{D}(f)}$. Pak funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Opět, inspirování důkazem příslušné věty pro funkci jedné proměnné ji lze dokázat.

Asi nás nepřekvapí následující analogie Heineho věty pro spojitost funkce v bodě.

Věta

(Heine) Necht' $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x^{[n]}\} \subset \mathcal{D}(f)$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{[n]} = a \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{[n]}) = f(a).$$

Další praktické věty

Věta

Nechť $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Jsou-li f a g spojité v bodě a , pak jsou v tomto bodě spojité i funkce

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \text{ (jestliže } g(a) \neq 0 \text{)}.$$

Důsledek

*Z předchozí věty a toho, že i -tá projekce a konstantní funkce jsou spojité v každém bodě plyne, že **polynom v $\mathbb{R}^N$** je spojitá funkce v každém bodě z $\mathbb{R}^N$.*

Spojítost složené funkce

Věta

Nechť pro $g_1, \dots, g_M : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ platí, že g_i jsou spojité v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ pro $i = 1, \dots, M$ a f je spojitá v bodě $(g_1(a), \dots, g_M(a))$. Pak složená funkce

$$F = f(g_1, \dots, g_M)$$

je spojitá v bodě a .

Příklad

Například funkce $F(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ je podle výše uvedené věty spojitá v každém bodě $z \in \mathbb{R}^2$, protože funkce

$$f(z) = \sin z \quad \text{a} \quad g_1(x, y) = x^2 + y^2$$

jsou spojité ve všech bodech svých definičních oborů.

Spojitost na množině

Definice

Řekneme, že $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá na $M \subset \mathcal{D}(f)$* , jestliže je spojitá v každém bodě množiny M .

Spojité funkce na kompaktních a souvislých množinách mají jisté pěkné vlastnosti - jde o zobecnění vět pro spojité funkce *jedné proměnné* – viz doporučenou literaturu – např. Došlá (věty 2.10, 2.11). Uvedu zde tu nejdůležitější, kterou budeme potřebovat u extrémů funkcí více proměnných.

Věta

Spojitá funkce více proměnných je na kompaktní množině omezená. Dokonce na ní nabývá minima i maxima.

Srovnajte s odpovídající větou pro funkce jedné proměnné – věta z 35. slajdu minulé přednášky.

Diferenciální počet funkcí více proměnných

Zobecnili jsme limitu a spojitost pro funkce více proměnných. Jak to bude s derivacemi? Co je derivace funkce **jedné** proměnné a jaký je její geometrický význam?

Derivace funkce v určitém bodě popisovala rychlost změny funkční hodnoty $f(x)$ při zvětšování x v okolí bodu a . Už u funkce dvou proměnných je tu problém: **Jakým způsobem se budeme s $x \in \mathbb{R}^2$ k bodu $a \in \mathbb{R}^2$ přibližovat?**

U funkce jedné proměnné to šlo pouze zprava či zleva.

U funkce dvou a více proměnných máme nekonečně mnoho „směrů“ (obecně by se dalo k bodu přibližovat po jakékoliv množině, která by tento bod obsahovala ve svém uzávěru – zde se budeme blížit **POUZE** po přímkách).

Směrové derivace

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int}(\mathcal{D}(f))$, $0 \neq \nu \in \mathbb{R}^N$. Existuje-li limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h\nu) - f(a)}{h}$$

nazýváme ji **derivací funkce f v bodě a ve směru ν** (směrovou derivací funkce f v bodě a ve směru vektoru ν). Budeme ji značit symboly

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a), f'_\nu(a), f_\nu(a), \dots$$

Poznámka

Směrová derivace bude určovat rychlost změny funkčních hodnot funkce f v bodě a ve směru vektoru ν **POUZE TEHDY**, když $\|\nu\| = 1$ (jde o euklidovskou normu!). To bude vidět z obrázku.

K pochopení smyslu definice je třeba znát geometrický význam. Napomoci může definice následující funkce **jedné proměnné**: Definujme funkci $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$g(h) = f(a + h\nu).$$

Zřejmě

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \nu}(a).$$

Jaký je vztah mezi funkcemi f a g ? Jaký pak mají geometrický význam čísla $g'(0)$ a $f'_\nu(a)$?

Platí (není třeba se to učit ke zkoušce)

Lemma

Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $a \in \text{int}(\mathcal{D}(f))$ derivaci ve směru $\nu \neq 0$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak existuje i derivace funkce f ve směru vektoru $c\nu$ a platí

$$\frac{\partial f}{\partial(c\nu)}(a) = c \frac{\partial f}{\partial \nu}(a).$$

Důkaz

Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial c\nu}(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hc\nu) - f(a)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hc\nu) - f(a)}{ch} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\nu) - f(a)}{t} = c \frac{\partial f}{\partial \nu}(a), \end{aligned}$$

kde jsme provedli substituci $t = ch$.

Parciální derivace v bodě

Nyní se podívejme na směrové derivace **ve směru prvků standardní báze prostoru $\mathbb{R}^N$** , ozn. $e^{[i]}$ ($e^{[i]}$ je vektor mající i -tou složku rovnu jedné a ostatní rovny nule), $i = 1, \dots, N$. Všimněte si, že

$$\|e^{[i]}\| = 1.$$

Definice

Necht' $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int}(\mathcal{D}(f))$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Směrovou derivaci funkce f v bodě a ve směru vektoru $e^{[i]}$ nazýváme **parciální derivací funkce f podle i -té proměnné** a označujeme ji

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), f'_{x_i}(a), f'_i(a), \dots$$

K čemu by mohly být dobré parciální derivace?

Poznámka

Dovedli byste uhádnout, k čemu by nám mohli být obě parciální derivace dané funkce dvou proměnných v daném bodě? Měly by nějaké praktické uplatnění? (návod: tečná rovina grafu funkce)

Parciální derivace

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, kde $D \subset \mathcal{D}(f)$ je otevřená množina, $i \in \{1, \dots, r\}$.
Nechť pro každé $x \in D$ existuje $f_{x_i}(x)$. Pak funkci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

nazýváme **parciální derivací funkce f podle i -té proměnné** (podle proměnné x_i) **na D** .

Opět jako u funkce jedné proměnné: Je třeba rozlišovat mezi pojmy **parciální derivace v bodě** a **parciální derivace**.

Praktické počítání parciálních derivací

Jak spočítat směrové derivace? Podle definice. To ale není příliš efektivní. Speciálně **parciální** derivace můžeme počítat na základě našich dovedností derivování funkce jedné proměnné.

Poznámka

Chceme-li spočítat parciální derivaci podle její proměnné x_i v bodě x , pak ji stačí chápat jako funkci jedné proměnné x_i , přičemž ostatní proměnné chápeme jako konstanty. Pak je třeba jen umět vzorečky a vztahy pro derivaci funkce jedné proměnné. Tato fakta plynou přímo z definice – zjistěte jak! (To je jedna z výhod pojmu parciální derivace!)

Příklad

Uvažujme funkci

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2,$$

a bod $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Jak spočítáme $f'_x(a, b)$?

(a) Podle definice

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(a+b)^2 + (a+h)b + b^2] - [a^2 + ab + b^2]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} + \frac{a+h-a}{h}b + \frac{b^2 - b^2}{h} \right) = 2a + b.\end{aligned}$$

(b) Určíme funkční předpis funkce f'_x a dosadíme do něj bod (a, b) .
Platí

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + xy + y^2) = 2x + y.$$

Pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2a + b.$$

Věta

(o přírůstku) Necht' $D = (c_1, d_1) \times (c_2, d_2) \times \dots \times (c_N, d_N)$ a $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ má parciální derivace f_{x_i} na D pro všechna $i = 1, \dots, N$.

Pak pro každé $a = (a_1, \dots, a_N)$, $b = (b_1, \dots, b_N) \in D$ existují $\theta_1, \dots, \theta_N \in (0, 1)$ tak, že platí

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(q^{[i]})(b_i - a_i),$$

kde $q^{[j]} = (b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, a_j + \theta_j(b_j - a_j), a_{j+1}, \dots, a_N)$ pro $j = 1, \dots, N$.

Důkaz

Provedeme pouze pro $N = 2$. Máme tedy dokázat následující tvrzení:
Nechť $f : D = (c_1, d_1) \times (c_2, d_2) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ má parciální derivace f_{x_1} , f_{x_2} na D . Pak pro každé $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ existují $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ tak, že

$$\begin{aligned} f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(q^{[1]})(b_1 - a_1) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2}(q^{[2]})(b_2 - a_2) \end{aligned}$$

kde $q^{[1]} = (a_1 + \theta_1(b_1 - a_1), a_2)$, $q^{[2]} = (b_1, a_2 + \theta_2(b_2 - a_2))$.

Důkaz je založen na aplikaci Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

Předpokládejme, že $a_1 < b_1$ a $a_2 < b_2$ – rozmyslete ostatní případy.

...pokračování důkazu

Definujeme funkce

$$g_1(x_1) = f(x_1, a_2) \quad x_1 \in \langle a_1, b_1 \rangle,$$

$$g_2(x_2) = f(b_1, x_2) \quad x_2 \in \langle a_2, b_2 \rangle.$$

Platí

$$g'_1(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, a_2) \quad x_1 \in (a_1, b_1),$$

$$g'_2(x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(b_1, x_2) \quad x_2 \in (a_2, b_2)$$

z čehož také plyne, že obě funkce jsou spojité na svých definičních oborech. Pak podle Lagrangeovy věty existují $\xi_1 \in (a_1, b_1)$, $\xi_2 \in (a_2, b_2)$ tak, že

$$g_1(b_1) - g_1(a_1) = g'_1(\xi_1)(b_1 - a_1), \quad g_2(b_2) - g_2(a_2) = g'_2(\xi_2)(b_2 - a_2).$$

...pokračování důkazu

Platí

$$\begin{aligned}f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) &= f(b_1, b_2) - f(b_1, a_2) + f(b_1, a_2) - f(a_1, a_2) \\&= g_2(b_2) - g_2(a_2) + g_1(b_1) - g_1(a_1) \\&= g'_2(\xi_2)(b_2 - a_2) + g'_1(\xi_1)(b_1 - a_1) \\&= \frac{\partial f}{\partial x_2}(b_1, \xi_2)(b_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, a_2)(b_1 - a_1).\end{aligned}$$

Zřejmě můžeme psát $\xi_i = a_i + \theta_i(b_i - a_i)$, kde $\theta_i \in (0, 1)$ pro $i = 1, 2$, dostáváme tvrzení věty.

Parciální derivace a spojitost

U funkce jedné proměnné platí, že má-li funkce f vlastní derivaci v bodě a , pak je v a spojitá. Dalo by se očekávat, že bude platit zobecnění:

Má-li funkce $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ parciální derivace podle všech proměnných v bodě a , pak je v bodě a spojitá.

To ale pravda není, např. pro funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

lze snadno spočítat, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

přitom není v bodě $(0, 0)$ spojitá (viz pár slajdů zpět).

Na spojitost budeme muset předpokládat mnohem víc. Viz další větu. 

Věta

Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ na $\mathcal{U}(a) \subset \mathcal{D}(f)$ omezené parciální derivace podle všech proměnných. Pak je f v bodě a spojitá.

Důkaz

Provedeme opět pro $N = 2$. K okolí $\mathcal{U}(a)$ jistě najdeme otevřený interval $(c_1, d_1) \times (c_2, d_2)$ takový, že

$$a \in (c_1, d_1) \times (c_2, d_2) \subset \mathcal{U}(a).$$

Pak podle předpokladů má funkce f na tomto intervalu parciální derivace f'_{x_1}, f'_{x_2} a existuje $K > 0$ tak, že

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right| \leq K, \quad \text{pro všechna } x \in (c_1, d_1) \times (c_2, d_2).$$

Podle předchozí věty pak pro body $x = (x_1, x_2)$, $a = (a_1, a_2)$ existují $q^{[1]}, q^{[2]} \in (c_1, d_1) \times (c_2, d_2)$ tak, že

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(q^{[1]})(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(q^{[2]})(x_2 - a_2) \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(q^{[1]}) \right| |x_1 - a_1| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(q^{[2]}) \right| |x_2 - a_2| \\ &\leq K(|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|) \\ &\leq 2K \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = 2K \|x - a\|. \end{aligned}$$

Zvolme $\epsilon > 0$. Pak podle předchozích nerovnic plyne, že stačí položit $\delta \leq \frac{\epsilon}{2K}$ pro které navíc platí $\mathcal{U}_\delta(a) \subset (c_1, d_1) \times (c_2, d_2)$. Pro každé $x \in D$ pak z předchozích výpočtů platí

$$\|x - a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < 2K\delta \leq \epsilon,$$

což není nic jiného než spojitost funkce f v bodě a .

I pro směrovou derivaci platí věta o střední hodnotě (použije se např. v důkazu Taylorovy věty - viz další přednášku).

Věta

(o střední hodnotě) Necht' $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$, $0 \neq \nu \in \mathbb{R}^N$ jsou takové, že existuje f_ν ve všech bodech úsečky

$$\{a + t\nu : t \in \langle 0, 1 \rangle\} \subset \mathcal{D}(f).$$

Pak existuje $\theta \in (0, 1)$ tak, že

$$f(a + \nu) - f(a) = f_\nu(a + \theta\nu).$$

Důkaz

Definujeme funkci

$$g(t) = f(a + t\nu), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

a aplikujeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě.

Parciální derivace druhého řádu (v bodě)

Definice

Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ parciální derivace f'_{x_i} , $i \in \{1, \dots, N\}$ na okolí bodu $a \in \mathcal{D}(f)$, $j \in \{1, \dots, N\}$. Existuje-li parciální derivace funkce f_{x_j} podle j -té proměnné v bodě a , nazýváme ji **parciální derivací 2. řádu funkce f v bodě a podle proměnných x_i, x_j** (v tomto pořadí), značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), f''_{x_i x_j}(a), f_{x_i x_j}(a).$$

Je-li $i = j$, píšeme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a), f'_{x_i^2}(a), f_{x_i^2}(a) \dots$$

Derivace druhého řádu

Definice

Nechť má funkce f parciální derivaci $f''_{x_i x_j}(x)$ v každém bodě $x \in D \subset \mathcal{D}(f)$. Pak funkci

$$D \ni x \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

nazýváme *parciální derivací funkce f druhého řádu podle proměnných x_i, x_j na D* a značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, f''_{x_i x_j}, f_{x_i x_j}$$

(jde tedy o funkci N proměnných).

Schwarzova věta

Následující věta nám usnadní práci při počítání derivaci druhého (i vyššího) řádu.

Věta

(Schwarzova) Má-li funkce $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ v okolí $\mathcal{U}(a) \subset \mathcal{D}(f)$ bodu a parciální derivace f'_{x_i}, f'_{x_j} ($i, j \in \{1, \dots, N\}$) a derivaci $f''_{x_i x_j}$, která je v bodě a spojitá, pak existuje $f_{x_j x_i}(a)$ a platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Důsledek

Jestliže je funkce $f''_{x_i x_j}$ spojitá na otevřené množině $D \subset \mathcal{D}(f)$, pak existuje $f''_{x_j x_i}$ na D a tyto funkce jsou si rovny.

Derivace vyšších řádů

Poznámka

Podobně můžeme nadefinovat směrové a parciální derivace libovolného řádu. Viz doporučenou literaturu.

Doporučená literatura

KOPÁČEK J. Matematická analýza pro fyziky II. Matfyzpress, Praha, 2005.

DOŠLÁ, Z, DOŠLÝ O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, Masarykova univerzita, Brno, 2003.

BRABEC, J., HRŮZA, B.: Matematická analýza II, SNTL, Praha, 1986.

FAQ aneb často kladené otázky u zkoušky

- Proč chceme v definici parciální derivace (a směrové derivace) v bodě a , aby $a \in \text{int}(D(f))$?
- Jaký je vztah mezi parciální derivací a derivací ve směru?
- Jaký je vztah spojitosti funkce v bodě a existence směrových derivací? Je to stejné jako u funkcí jedné proměnné? (Odpověď: Existují funkce, které nejsou v daném bodě spojité, přitom v tomto bodě mají směrové derivace v každém směru, např

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

není v počátku spojitá, přitom existuje $f_\nu(0, 0)$ pro každé $\nu \neq 0$.)

- Jak prakticky počítáme parciální derivace? Čeho využíváme a odkud to plyne?
- Jaký je rozdíl mezi pojmy „parciální derivace v bodě“ a „parciální derivace“ (podle i -té proměnné)?
- Jaký praktický význam má Schwarzova věta?