

# Texty k přednáškám z MMAN3:

## 3. Metrické prostory

3. července 2012

### 1 Metrika na množině, metrický prostor

Pojem vzdálenosti dvou reálných (komplexních) čísel, nebo bodů v rovině či prostoru je známý ze střední školy. Ovšem měřit vzdálenosti bychom chtěli i mezi prvky jiných množin. Podíváme na pojem *vzdálenosti* obecněji. Vzdálenost dvou prvků (dané množiny) bude obecně realizována pomocí jistého speciálního zobrazení – metriky.

**Definice 1** Metrickým prostorem nazveme dvojici  $(X, \rho)$ , kde  $X$  je neprázdná množina a  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  mající následující vlastnosti:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$  pro každé  $(x, y) \in X \times X$  (nezápornost),
2.  $\rho(x, y) = 0$  právě tehdy, když  $x = y$  (definitnost),
3.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  pro každé  $x, y \in X$  (symetrie),
4.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  pro každé  $x, y, z \in X$  (trojúhelníková nerovnost).

Množině  $X$  říkáme nosič a zobrazení  $\rho$  nazýváme metrika.

**Poznámka 1** V předchozí definici je tedy každé dvojici prvků množiny  $X$  (představte si třeba rovinu) přiřazeno číslo  $\rho(x, y)$  (můžeme mu říkat vzdálenost bodu  $x$  od bodu  $y$ ). Vlastnost 1 v předchozí definici vlastně jen říká, že vzdálenost dvou bodů nemůže být záporná. Druhá vlastnost nám zaručuje, že dva různé prvky mají od sebe vždy kladnou vzdálenost. Třetí vlastnost říká, že vzdálenost bodu  $x$  od bodu  $y$  je stejná jako vzdálenost bodu  $y$  od bodu  $x$ . Poslední vlastnost říká, že máme-li tři body, pak vzdálenost dvou z nich je vždy menší než součet jejich vzdáleností se třetím bodem (stačí si představit tyto prvky jako vrcholy trojúhelníka a vzpomenout si na základní školu).

**Příklad 1** Uvažujme  $X = \mathbb{R}$  a  $\rho(x, y) = |x - y|$  pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$ . Pak  $(\mathbb{R}, \rho)$  je zřejmě metrický prostor, protože jsou splněny všechny podmínky z definice 1. Například čtvrtá vlastnost se dá ověřit s použitím známé nerovnosti

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad \text{pro každé } a, b \in \mathbb{R}$$

(je-li totiž  $x, y, z \in \mathbb{R}$  pak

$$\rho(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Pokud nebude řečeno jinak, budeme vždy na množině všech reálných čísel uvažovat tuto metriku. S tímto metrickým prostorem (s touto metrikou) vlastně pracujeme už od střední školy.

**Příklad 2** Nyní uvažujme stejný nosič jako v předchozím příkladě, tedy  $X = \mathbb{R}$ , přičemž zobrazení  $\rho$  bude definováno předpisem

$$\rho(x, y) = 2|x - y|.$$

Snadno se přesvědčíme, že i tato dvojice  $(X, \rho)$  je metrický prostor. Ovšem zde mají od sebe body dvakrát větší vzdálenost než body v metrickém prostoru z příkladu 1.

**Příklad 3** Vezmeme-li opět  $X = \mathbb{R}$  a zobrazení

$$\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \quad \text{pro každé } x, y \in \mathbb{R},$$

pak dvojice  $(\mathbb{R}, \rho)$  opět tvoří metrický prostor. Jak lze geometricky interpretovat vzdálenost bodů v tomto metrickém prostoru? Nakreslete si obrázek.

Všimněte si, že z jedné množiny mohlo vzniknout více metrických prostorů (jinak řečeno: na stejné množině jsme mohli definovat různé metriky).

**Příklad 4** Na množině  $X = \mathbb{R}^n$  používáme několik různých metrik (dostáváme pak různé metrické prostory). Jsou to například

$$\rho_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \quad (\text{tzv. euklidovská metrika}),$$

$$\rho_\Sigma(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (\text{součtová metrika}),$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1, \dots, n\} \quad (\text{maximová metrika})$$

pro každé  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ . Dokažte!

Jak lze geometricky interpretovat vzdálenost bodů v příslušných metrických prostorech pro  $n = 2$  a  $n = 3$ ?

Je také dobré si uvědomit jak vypadá množina

$$K(o, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, o) < 1\}$$

(kde  $o = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  je nulový vektor) postupně pro každou výše uvedenou metriku v  $\mathbb{R}^n$  (množinu  $K(o, 1)$  nazýváme jednotková koule). Je vám povědomá metrika  $\rho_E$  pro  $n = 2$  a  $n = 3$ ?

Doposud jsme si ukazovali různé druhy metrik na známých množinách. V následujícím příkladu dáme smysl pojmu *vzdálenost dvou funkcí*. Opět máme volnou ruku při výběru metriky.

**Příklad 5** Necht'  $X = C([0, 1])$  je množina všech reálných funkcí spojitých na intervalu  $[0, 1]$ . Na této množině uvažujeme následující metriky:

$$\rho_{\infty}(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\} \quad (\text{maximová metrika}),$$

$$\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx \quad (\text{integrální metrika}),$$

$$\rho_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 \, dx} \quad (\text{tzv. } L_2\text{-metrika}).$$

Ověřte, že  $(X, \rho_\infty)$ ,  $(X, \rho_1)$  a  $(X, \rho_2)$  jsou metrické prostory (pozor! Je potřeba také ukázat, že tato zobrazení jsou dobře definovaná).

**Poznámka 2** (a) Na dané množině lze uvažovat více metrik – pak dostáváme různé metrické prostory (ale se stejným nosičem). Metrický prostor  $(X, \rho)$  můžeme stručně značit jako  $X$ , pokud je jasné jakou na  $X$  uvažujeme metriku. Například množinu  $\mathbb{R}$  budeme téměř vždy uvažovat s metrikou z příkladu 1.

(b) Pomocí trojúhelníkové nerovnosti lze dokázat tzv. zobecněnou trojúhelníkovou nerovnost:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in X : \rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \dots + \rho(x_{n-1}, x_n).$$

(c) Dále platí (lze dokázat pomocí trojúhelníkové nerovnosti):

$$\forall x, y, z \in X : |\rho(x, y) - \rho(x, z)| \leq \rho(y, z).$$

(d) Jsou-li dány metrické prostory  $(X, \rho_1)$ ,  $(X, \rho_2)$ , řekneme, že  $\rho_1$  a  $\rho_2$  jsou ekvivalentní metriky ( $(X, \rho_1)$  a  $(X, \rho_2)$  jsou ekvivalentní metrické prostory), jestliže existují  $\alpha, \beta > 0$  tak, že

$$\alpha \leq \frac{\rho_1(x, y)}{\rho_2(x, y)} \leq \beta \quad \text{pro každé } x, y \in X, \ x \neq y.$$

(e) Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor a  $\emptyset \neq M \subset X$ . Definujeme  $\rho_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  vztahem

$$\rho_M(x, y) = \rho(x, y) \quad \text{pro každé } x, y \in M.$$

Pak  $(M, \rho_M)$  tvoří metrický prostor (nazýváme ho podprostorem prostoru  $(X, \rho)$ ).  
Dokažte!

(f) Necht'  $(X, \rho)$ ,  $(Y, \sigma)$  jsou metrické prostory,  $\Phi : X \rightarrow Y$  bijektivní zobrazení. Jestliže

$$\sigma(\Phi(x), \Phi(y)) = \rho(x, y) \quad \text{pro každé } x, y \in X,$$

pak zobrazení  $\Phi$  nazýváme izometrické zobrazení a říkáme, že  $X$  a  $Y$  jsou izometrické prostory (pro lepší představu si nakreslete obrázek!).

## 2 Normovaný lineární prostor

V předchozí sekci jsme s určitou množinou  $X$  uvažovali zobrazení přiřazující každé dvojici bodů z této množiny jejich *vzdálenost*. Nyní budeme definovat podobný pojem *velikosti prvku* (normu). Toto zobrazení nebudeme tentokrát uvažovat s libovolnou množinou ale pouze s vektorovým prostorem.

Nejprve tedy nadefinujeme pojem (*reálný*) *lineární prostor* nebo také *vektorový prostor* (ikdyž ho asi znáte z prvního ročníku).

**Definice 2** Necht' je dána neprázdná množina  $X$ , množina skalárů  $\mathbb{T}$  (tj.  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{T} = \mathbb{C}$ ) a jsou definována zobrazení

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad (\text{tzv. sčítání})$$

a

$$\cdot : \mathbb{T} \times X \rightarrow X \quad (\text{tzv. násobení skalárem})$$

mající následující vlastnosti:

(a)  $x + y = y + x$ ,

(b)  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ,

(c) existuje právě jeden  $o \in X$  (nazýváme ho nulový prvek), pro který platí

$$x + o = x \quad \text{pro každé } x \in X,$$

(d) pro každý prvek  $x \in X$  existuje právě jeden prvek  $-x \in X$  (nazýváme ho opačným k prvku  $x$ ) tak, že platí

$$x + (-x) = o,$$

(e)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  pro každé  $\alpha \in \mathbb{T}$ ,  $x, y \in X$ ,

(f)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  pro každé  $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ ,  $x \in X$ ,

(g)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$  pro každé  $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ ,  $x \in X$ ,

(h)  $1x = x$  pro každé  $x \in X$ .

Pak uspořádanou trojici  $(X, +, \cdot)$  nazýváme lineární (vektorový) prostor. Jestliže  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , pak jej nazýváme reálný, pokud  $\mathbb{T} = \mathbb{C}$  pak komplexní.

**Poznámka 3** Zde budeme pracovat pouze s reálnými lineárními prostory, takže přívlástek reálný nebudeme psát. Pokud to bude z kontextu jasné, pak budeme místo uspořádané trojice  $(X, +, \cdot)$  psát pouze  $X$ .

Nyní můžeme přistoupit k definici prostoru vybaveného normou.

**Definice 3** Normovaným lineárním prostorem nazveme dvojici  $(X, \|\cdot\|)$ , kde  $X$  je lineární prostor a zobrazení  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  má následující vlastnosti:

1.  $\|x\| \geq 0$  pro každé  $x \in X$  (nezápornost),
2.  $\|x\| = 0$  právě tehdy když  $x = o$  (definitivnost),
3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  pro každé  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \in X$  (homogenita),
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  pro každé  $x, y \in X$  (trojúhelníková nerovnost).

Množině  $X$  říkáme nosič a zobrazení  $\|\cdot\|$  nazýváme norma.

**Poznámka 4** Všimněte si některých podobností mezi definicemi metrického a normovaného lineárního prostoru. Naopak je třeba si uvědomit, že abychom mohli definovat normu, je nutné, aby byly na  $X$  definovány operace sčítání a násobení skalárem (viz vlastnosti (iii) a (iv)).

**Poznámka 5 (důležitá)** Mějme dán normovaný lineární prostor  $X$  s normou  $\|\cdot\|$ . Snadno se lze přesvědčit, že zobrazení

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \quad \text{pro každé } x, y \in X, \quad (1)$$

je metrika na  $X$  (tzn.  $(X, \rho)$  je metrický prostor). Každý normovaný lineární prostor tedy můžeme chápat jako metrický prostor, přičemž metrika bude určena vztahem (1). Pak také platí

$$\|x\| = \rho(x, o) \quad \text{pro každé } x \in X,$$

tzn. velikost vektoru  $x$  je rovna jeho vzdálenosti od nulového prvku  $o \in X$ .

**Poznámka 6** Příklady normovaných lineárních prostorů:

1. Prostor  $X = \mathbb{R}$  (s obvyklými operacemi sčítání a násobení skalárem) s normou  $\|x\| = |x|$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$  (viz poznámku 5 a příklad 1).
2. Prostor  $X = \mathbb{R}$  s normou  $\|x\| = 2|x|$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$  (viz poznámku 5 a příklad 2).
3. Prostor  $X = \mathbb{R}^n$  s normami

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (\text{tzv. euklidovská norma}),$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{součtová norma}),$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1, \dots, n\} \quad (\text{maximová norma}),$$

a obecně pro  $p > 1$  můžeme definovat

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}^n,$$

---

<sup>0</sup>Znovu připomínám, že v poznámce 3 jsme se dohodli, že zde budeme pracovat pouze s reálnými lineárními prostory

Všimněte si souvislosti mezi těmito normami a metrikami z příkladu 4 – viz poznámku 5.

4. Prostor  $C([0, 1])$  můžeme vybavit takovými normami

$$\|f\|_{\infty} = \max\{|f(x)| : x \in [0, 1]\} \quad (\text{maximová norma}),$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, dx, \quad (\text{integrální norma}),$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx} \quad (\text{tzv. } L_2\text{-norma}),$$

a obecně pro  $p > 1$  lze definovat

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x)|^p \, dx} \quad (\text{tzv. } L_p\text{-norma}).$$

Všimněte si souvislosti mezi těmito normami a metrikami z příkladu 5 – viz poznámku 5.

### 3 Okolí bodu

**Definice 4** Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor. Pro  $\delta > 0$  a  $a \in X$  rozumíme  $\delta$ -okolím bodu  $a$  množinu

$$U(a, \delta) = \{x \in X : \rho(x, a) < \delta\}.$$

Číslo  $\delta$  nazýváme poloměr.

**Poznámka 7** Jinými slovy,  $\delta$ -okolí bodu je množina všech bodů, které mají od něj vzdálenost menší než  $\delta$ . Třeba v příkladu 1 je  $\delta$ -okolím bodu  $a \in \mathbb{R}$  otevřený interval  $(a - \delta, a + \delta)$ . Vezmeme-li množinu  $\mathbb{R}^2$  a euklidovskou metriku (viz příklad 4) pak  $\delta$ -okolím počátku je otevřený kruh s poloměrem 1 a se středem v počátku. Podobně v  $\mathbb{R}^3$  vybavené euklidovskou metrikou je 1-okolím počátku otevřená koule se středem v počátku a poloměrem 1. V prostoru  $\mathbb{R}^2$  s maximovou metrikou je  $\delta$ -okolím počátku otevřený čtverec s vrcholy o souřadnicích  $[\delta, \delta]$ ,  $[-\delta, \delta]$ ,  $[-\delta, -\delta]$  a  $[\delta, -\delta]$ . V prostoru  $\mathbb{R}^2$  se součtovou metrikou je  $\delta$ -okolí počátku opět otevřený čtverec, ale s vrcholy o souřadnicích  $[\delta, 0]$ ,  $[0, \delta]$ ,  $[-\delta, 0]$  a  $[0, -\delta]$ . Sami si ověřte!

**Poznámka 8** Často v tvrzení vět nebývá důležitá konkrétní hodnota poloměru  $\delta$ , takže místo  $U(a, \delta)$  píšeme  $U(a)$  (a čteme *okolí bodu a*). Například výrok

pro každý bod  $a \in A \subset X$  existuje okolí  $U(a)$  tak, že  $U(a) \subset A$ ,

znamená to stejné jako

pro každý bod  $a \in A \subset X$  existuje  $\delta > 0$  tak, že  $U(a, \delta) \subset A$ .

**Definice 5** Množinu  $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$  nazveme prstencovým (redukovaným) okolím bodu  $a$ .

#### 4 Klasifikace bodů vzhledem k množině

V metrickém prostoru můžeme definovat pojmy jako uzavřená, otevřená množina, hranice množiny, uzávěr množiny apod. Z prvního ročníku jsou tyto pojmy známy speciálně pro  $\mathbb{R}$ .

**Definice 6** Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor,  $A \subset X$  je neprázdná množina a  $a \in X$ .

Řekneme, že  $a$  je vnitřní bod množiny  $A$ , jestliže existuje okolí  $U(a)$  tak, že

$$U(a) \subset A.$$

Množinu všech vnitřních bodů množiny  $A$  nazýváme vnitřek množiny  $A$  a značíme  $A^\circ$  nebo  $\text{int}A$ .

Řekneme, že  $a$  je vnější bod množiny  $A$ , jestliže existuje okolí  $U(a)$  tak, že

$$U(a) \subset X \setminus A.$$

Množinu všech vnějších bodů množiny  $A$  nazýváme vnějšek množiny  $A$  a značíme  $A^e$  nebo  $\text{ext}A$ .

Řekneme, že  $a$  je hraniční bod množiny  $A$ , jestliže pro každé okolí  $U(a)$  platí

$$U(a) \cap A \neq \emptyset \quad \text{a zároveň} \quad U(a) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hraničních bodů množiny  $A$  nazýváme hranice množiny  $A$  a značíme  $\partial A$  nebo  $\text{h}A$ .

Řekneme, že  $a$  je bod uzávěru množiny  $A$ , jestliže pro každé okolí  $U(a)$  platí

$$U(a) \cap A \neq \emptyset.$$

Množinu všech bodů uzávěru množiny  $A$  nazýváme uzávěr množiny  $A$  a značíme  $\bar{A}$  nebo  $\text{cl}A$ .

Řekneme, že  $a$  je hromadný bod množiny  $A$ , jestliže pro každé prstencové okolí  $P(a)$  platí

$$P(a) \cap A \neq \emptyset.$$

Řekneme, že bod  $a$  je izolovaný bod množiny  $A$ , jestliže  $a \in A$  a existuje prstencové okolí  $P(a)$  takové, že

$$P(a) \cap A = \{a\}.$$

**Poznámka 9** Z definic je zřejmé, že  $A^\circ \subset A$ ,  $A \cap A^e = \emptyset$  a že trojice  $A^\circ$ ,  $\text{h}A$ ,  $A^e$  tvoří rozklad prostoru  $X$  (to znamená, že  $A^\circ \cup \text{h}A \cup A^e = X$  a přitom  $A^\circ \cap \text{h}A = \emptyset$ ,  $\text{h}A \cap A^e = \emptyset$ ,  $A^\circ \cap A^e = \emptyset$ ). Dále platí  $A^\circ = A \setminus \bar{A}$ ,  $\bar{A} = A \cup \text{h}A$  atd. Dokažte!

## 5 Otevřené a uzavřené množiny a jejich vlastnosti

**Definice 7** Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor,  $A \subset X$ . Řekneme, že množina  $A$  je otevřená, jestliže  $A = A^\circ$ . Řekneme, že množina  $A$  je uzavřená, jestliže  $A = \bar{A}$ .

**Věta 1** Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor,  $A \subset X$ . Pak platí:

*Množina  $A$  je uzavřená právě tehdy, když je v ní obsažena její hranice (tedy  $hr A \subset A$ ).*

*Množina  $A$  je otevřená právě tehdy když je disjunktí se svou hranicí (tedy  $A \cap hr A = \emptyset$ ).*

*Množina  $A$  je uzavřená (resp. otevřená) právě tehdy, když její doplněk  $X \setminus A$  je otevřená (resp. uzavřená) množina.*

Následující věta popisuje základní vlastnosti množin. Její důkaz je velmi jednoduchý. Dokažte!

**Věta 2** *Sjednocení libovolného (tedy konečného i nekonečného) počtu otevřených množin je otevřená množina.*

*Průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.*

*Sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.*

*Průnik libovolného (tedy konečného i nekonečného) počtu uzavřených množin je uzavřená množina.*

*Prostor  $X$  a prázdná množina  $\emptyset$  jsou obě zároveň otevřené i uzavřené.*

## 6 Vzdálenost bodu od množiny. Průměr množiny

V metrickém prostoru můžeme kromě vzdáleností mezi jeho body také definovat vzdálenost bodů od množiny i vzdálenost dvou množin.

**Definice 8** Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor,  $a \in X$ ,  $A \subset X$ ,  $B \subset X$  jsou neprázdné množiny. Pak vzdáleností bodu  $a$  od množiny  $A$  rozumíme číslo

$$\rho(a, A) = \inf\{\rho(a, x) : x \in A\}.$$

Vzdáleností množin  $A$  a  $B$  rozumíme číslo

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

**Poznámka 10** Všimněte si, že používáme stejný symbol pro metriku, vzdálenost bodu od množiny a vzdálenost dvou množin. Z kontextu je ovšem vždy jasné co symbol  $\rho$  na daném místě znamená.

Dalším pojmem, který lze zavést v metrických prostorech je průměr množiny.

**Definice 9** Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor,  $A \subset X$ . Průměrem neprázdné množiny  $A$  nazýváme číslo

$$\text{diam } A = \sup\{\rho(x, y) : x \in A, y \in A\},$$

Pro  $A = \emptyset$  klademe  $\text{diam } A = 0$ .

## 7 Konvergentní a cauchyovské posloupnosti bodů

Každému je znám ze základního kurzu analýzy pojem limity posloupnosti reálných čísel. Tento pojem můžeme zavést i v metrickém prostoru (vlastně to je ten nejdůležitější důvod, proč se o metrických prostorech bavíme).

**Definice 10** Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost bodů v metrickém prostoru  $(X, \rho)$  (tedy  $a_n \in X$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ ),  $a \in X$ . Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k bodu  $a$  v prostoru  $(X, \rho)$  (v  $X$  – viz poznámku 2(a); v  $\rho$ ), jestliže pro každé  $\epsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$n \geq n_0 \implies \rho(a_n, a) < \epsilon.$$

Prvek  $a$  nazýváme limitou posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a tento fakt zapisujeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{nebo} \quad a_n \rightarrow a \quad \text{v } (X, \rho).$$

**Poznámka 11** Definici limity lze formulovat různými způsoby. Například lze říct, že  $a \in X$  je limitou posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  v metrickém prostoru  $(X, \rho)$ , jestliže pro každé  $\epsilon$ -okolí  $U(a, \epsilon)$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$n \geq n_0 \implies a_n \in U(a, \epsilon).$$

Další možností je použít již známého pojmu limity posloupnosti reálných čísel. Platí totiž, že

$$a_n \rightarrow a \quad \text{v } \rho \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, a) = 0. \quad (2)$$

Tohoto faktu budeme často využívat v důkazech.

**Poznámka 12** Je vždy důležité uvádět, vzhledem v jakém metrickém prostoru (to znamená vzhledem k jaké metrice) daná posloupnost konverguje. Na jedné množině  $X$  lze definovat více metrik, např.  $\rho_1, \rho_2$ . Uvažujme posloupnost  $\{a_n\} \subset X$  (uvědomte si, že pojem posloupnosti VŮBEC nesouvisí s metrickým prostorem, ale pouze s množinou  $X$ ) a prvek  $a \in X$ . Pak tvrzení „posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k  $a$ “ nic neříká, protože není uvedena informace, vzhledem k jaké metrice uvažujeme konvergenci. Obecně totiž nemusí vždy ekvivalence

$$a_n \rightarrow a \quad \text{v } (X, \rho_1) \iff a_n \rightarrow a \quad \text{v } (X, \rho_2)$$

nebo-li konvergence dané posloupnosti k danému prvku v jedné metrice nemusí být v druhé metrice – viz následující příklad.

**Příklad 6** Vezmeme  $X = \mathbb{R}$  a zobrazení  $\rho_1(x, y) = |x - y|$  a

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } x \neq y, \\ 0 & \text{jestliže } x = y, \end{cases}$$

pro  $x, y \in \mathbb{R}$ . Lehce ověříme, že dvojice  $(\mathbb{R}, \rho_1)$  a  $(\mathbb{R}, \rho_2)$  jsou metrické prostory. Uvažujme posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ , kde  $a_n = \frac{1}{n}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Zřejmě platí

$$\rho_1(a_n, 0) = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

tedy  $a_n \rightarrow 0$  v  $(\mathbb{R}, \rho_1)$ . Přitom

$$\rho_2(a_n, 0) = 1 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$

z čehož vyplývá  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(a_n, 0) = 1$ , takže posloupnost  $\{a_n\}$  nekonverguje k nule v prostoru  $(\mathbb{R}, \rho_2)$  (posloupnost  $\{a_n\}$  v tomto prostoru nemá dokonce žádnou limitu – ověřte!).

**Věta 3** *Necht'  $(X, \rho_1)$ ,  $(X, \rho_2)$  jsou metrické prostory a metriky  $\rho_1, \rho_2$  jsou ekvivalentní (viz poznámka 2(d)). Pak pro každou posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  a prvek  $a \in X$  platí*

$$a_n \rightarrow a \quad \text{v } \rho_1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n \rightarrow a \quad \text{v } \rho_2.$$

*Důkaz.* Metriky  $\rho_1$  a  $\rho_2$  jsou ekvivalentní právě tehdy, když existují  $c_1, c_2 > 0$  tak, že

$$c_1 \leq \frac{\rho_1(x, y)}{\rho_2(x, y)} \leq c_2 \quad \text{pro každé } x, y \in X, x \neq y,$$

nebo-li

$$c_1 \rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq c_2 \rho_2(x, y) \quad \text{pro každé } x, y \in X$$

(pro  $x = y$  jsou tyto nerovnosti triviálně splněny). Z toho plyne

$$0 \leq \rho_2(x, y) \leq \frac{\rho_1(x, y)}{c_1} \quad \text{pro všechna } x, y \in X \quad (3)$$

a

$$0 \leq \rho_1(x, y) \leq c_2 \rho_2(x, y) \quad \text{pro všechna } x, y \in X. \quad (4)$$

Jestliže  $a_n \rightarrow a$  v  $\rho_1$ , pak z (3) plyne, že  $a_n \rightarrow a$  v  $\rho_2$ . Naopak, pokud  $a_n \rightarrow a$  v  $\rho_2$ , pak z (4) plyne, že  $a_n \rightarrow a$  v  $\rho_1$ .  $\square$

**Poznámka 13** Jak později uvidíte, v prostoru  $\mathbb{R}^n$  jsou všechny metriky z příkladu 4 navzájem ekvivalentní. Pokud tedy budeme mluvit o konvergenci v prostoru  $\mathbb{R}^n$ , budeme vždy myslet konvergenci vzhledem k jedné z nich.

Následující označení nám umožní přehlednější formulaci vět o vlastnostech posloupností a jejich limit.

**Poznámka 14** Řekneme, že  $V(n)$  platí pro skoro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , jestliže existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že platí  $V(n)$  pro všechna  $n \geq n_0$ .

Například řekneme-li, že pro posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  platí  $a_n = a \in X$  pro skoro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , jestliže existuje takové  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že  $a_n = a$  pro všechna  $n \geq n_0$ .

Některé vlastnosti limity posloupnosti reálných čísel se dají zobecnit pro limitu posloupnosti v metrickém prostoru.

**Věta 4** *Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost bodů v metrickém prostoru  $(X, \rho)$ . Pak platí:*

1. *Existuje nejvýše jedna limita posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .*
2. *Jestliže  $a_n = a$  pro skoro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , pak  $a_n \rightarrow a$ .*
3. *Jestliže  $a_n = b_n$  pro skoro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a jedna z posloupností je konvergentní, pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .*
4. *Jestliže  $\{b_n\}$  je vybraná posloupnost z konvergentní posloupnosti  $\{a_n\}$  a  $a_n \rightarrow a$ , pak  $b_n \rightarrow a$ .*
5. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

**Poznámka 15** Je-li  $(X, \|\cdot\|)$  normovaný lineární prostor, pak lze v něm definovat limitu posloupnosti bodů pomocí metriky definované vztahem 1.

**Věta 5** *Je-li  $(X, \|\cdot\|)$  normovaný lineární prostor,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ ,  $a, b \in X$ ,  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , pak platí*

1. *Jestliže  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ .*
2. *Jestliže  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n a_n = ca$ .*
3. *Jestliže  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \|a\|$ .*

**Věta 6** (Charakterizace uzavřené množiny) *Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor a  $M \subset X$ . Množina  $M$  je uzavřená právě tehdy, když limita každé konvergentní posloupnosti bodů ležících v  $M$  je prvkem množiny  $M$ .*

*Důkaz.* Předpokládejme, že  $M$  je uzavřená množina. Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$  je konvergentní posloupnost; její limitu označíme  $a \in X$ . Dokážeme, že  $a$  leží v množině  $M$ . Vezmeme libovolné okolí  $U(a) \subset X$  bodu  $a$ . Protože  $a$  je limitou posloupnosti  $\{a_n\}$ , pak  $a_n \in U(a)$  pro skoro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . Z toho vyplývá, že

$$U(a) \cap M \neq \emptyset.$$

Z definice bodu uzávěru vyplývá, že  $a \in \bar{M}$ . Protože  $M$  je uzavřená množina, pak také  $a \in M$ .

Nyní dokážeme opačnou implikaci. Předpokládejme, že každá konvergentní posloupnost bodů z  $M$  má v množině  $M$  limitu. Chceme dokázat  $M = \bar{M}$ . Protože vždy platí inkluze  $M \subset \bar{M}$ , stačí dokázat  $\bar{M} \subset M$ . Vezmeme libovolný bod  $a \in \bar{M}$ . Z definice uzávěru plyne, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $U(a, \frac{1}{n}) \cap M \neq \emptyset$ . Tedy pro každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje  $a_n \in M$  takový, že  $\rho(a_n, a) < \frac{1}{n}$ . Z (2) plyne, že posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je konvergentní posloupnost (v  $(X, \rho)$ ) bodů ležících v  $M$  a její limita je rovna  $a$ . Z předpokladu této věty vyplývá, že  $a \in M$ .  $\square$

**Věta 7** (konvergence v  $\mathbb{R}^k$ ) Necht'  $k \in \mathbb{N}$ . Posloupnost vektorů  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^k$  ( $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn})$ ) konverguje v metrice  $\rho_E$  (nebo v  $\rho_M$ ,  $\rho_\Sigma$ ,  $\rho_p$  pro  $p \geq 1$ ) k vektoru  $x = (x_1, \dots, x_k)$  právě tehdy, když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{in} = x_i$$

pro každé  $i \in \{1, \dots, k\}$  (to znamená, že v  $\mathbb{R}^k$  jde o konvergenci po složkách).

*Důkaz.* Předpokládejme, že  $x_n \subset \mathbb{R}^k$  konverguje k  $x \in \mathbb{R}^k$  v  $\rho_E$ . Vezmeme  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Pak

$$0 \leq |x_{in} - x_i| = \sqrt{(x_{in} - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_{jn} - x_j)^2} = \rho_E(x_n, x).$$

Protože  $\rho_E(x_n, x) \rightarrow 0$ , pak podle věty o třech limitách dostáváme, že  $x_{ni} \rightarrow x_i$  pro  $n \rightarrow \infty$ .

Necht'  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{in} = x_i$  pro každé  $i = 1, \dots, k$ . Vezmeme  $\epsilon > 0$  libovolné. Pak pro každé  $i = 1, \dots, k$  existuje  $n_i \in \mathbb{N}$  takové, že pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$n \geq n_i \quad \implies \quad |x_{in} - x_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{k}}.$$

Položíme  $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ . Pak pro  $i = 1, \dots, k$  a pro  $n \in \mathbb{N}$  splňující  $n \geq n_0$  platí

$$|x_{in} - x_i|^2 < \frac{\epsilon^2}{k}$$

a po sečtení pro všechna  $i$  dostaneme

$$\sum_{i=1}^k |x_{in} - x_i|^2 < \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon^2}{k} = \epsilon^2.$$

Odmocněním dostáváme

$$\rho_E(x_n, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^k |x_{in} - x_i|^2} < \epsilon.$$

Protože  $\epsilon$  bylo libovolné kladné, máme  $x_n \rightarrow x$  vzhledem k  $\rho_E$ . □

**Příklad 7** Uvažujme posloupnost vektorů  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^3$  definovanou předpisem

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}, 0\right), \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Z předchozí věty plyne, že  $x_n \rightarrow (1, e^{-1}, 0)$  pro  $n \rightarrow \infty$ .

**Příklad 8** Uvažujme posloupnost vektorů  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$  definovanou předpisem

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}, (-1)^n\right), \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Z předchozí věty plyne, že limita této posloupnosti neexistuje, protože posloupnost sestavená z druhých složek vektorů nemá limitu.

Uvažujme kompaktní interval  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  a množinu všech spojitých funkcí na intervalu  $[a, b]$  – tuto množinu budeme značit symbolem  $C([a, b])$ . Tuto množinu vybavíme maximovou metrikou, tzn. vezmeme

$$\rho_{\infty}(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Dá se ověřit, že dvojice  $(C([a, b]), \rho_{\infty})$  tvoří metrický prostor.

**Věta 8** Posloupnost funkcí  $\{f_n\} \subset C([a, b])$  je konvergentní v  $\rho_{\infty}$  právě tehdy, když  $\{f_n\}$  stejnoměrně konverguje na  $[a, b]$ . Přitom pro  $f \in C([a, b])$  platí

$$f_n \rightarrow f \quad \text{v } \rho_{\infty} \quad \Longleftrightarrow \quad f_n \rightrightarrows f \quad \text{na } [a, b].$$

*Důkaz.*

Stačí si uvědomit, že

$$\rho_m(f_n, f) = \max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

pro  $f_n, f \in C([a, b])$  a použít větu 2 z kapitoly "Posloupnosti a řady funkcí".  $\square$

## 8 Cauchyovské posloupnosti, úplný prostor

Pojem cauchyovské posloupnosti jsme již definovali pro číselné posloupnosti a posloupnosti funkcí. Nyní ji zdefinujeme na libovolném metrickém prostoru, přičemž tato definice bude splývat s předchozími.

**Definice 11** Necht'  $(X, \rho)$  je metrický prostor. Říkáme, že  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  je cauchyovská v  $(X, \rho)$  jestliže pro každé  $\epsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$  platí

$$m \geq n_0 \wedge n \geq n_0 \quad \implies \quad \rho(a_m, a_n) < \epsilon.$$

**Věta 9** Každá konvergentní posloupnost v metrickém prostoru je v něm cauchyovská.

*Důkaz.* Necht'  $\{a_n\} \subset X, x \in X, x_n \rightarrow x$  v  $(X, \rho)$ . Vezmeme libovolné  $\epsilon > 0$ . Pak existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$n \geq n_0 \quad \implies \quad \rho(a_n, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$  splňující nerovnosti  $m \geq n_0, n \geq n_0$  pak také platí

$$\rho(a_m, a_n) \leq \rho(a_m, x) + \rho(x, a_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Tím je důkaz ukončen.  $\square$

**Poznámka 16** Obrácené tvrzení neplatí, viz následující příklad.

**Příklad 9** Uvažujme množinu všech reálných čísel spolu s obvyklou metrikou  $(\rho(x, y) = |x - y|)$  a jeho podprostor  $(\mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{Q}})$ . Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{v } (\mathbb{R}, \rho).$$

Protože je tato posloupnost konvergentní v  $\mathbb{R}$ , je také cauchyovská v  $\mathbb{R}$ . Dále protože jde o posloupnost v  $\mathbb{Q}$  a indukovaná metrika  $\rho_{\mathbb{Q}}$  splývá na  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  s původní, je tato posloupnost cauchyovská v  $(\mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{Q}})$ . Protože  $e \notin \mathbb{Q}$ , nekonverguje tato posloupnost v  $\rho_{\mathbb{Q}}$ .

**Definice 12** Metrický prostor se nazývá úplný, jestliže každá jeho cauchyovská posloupnost je konvergentní.

**Poznámka 17** Z Bolzanovy–Cauchyovy věty plyne, že  $\mathbb{R}$  je úplný prostor. Z příkladu 9 je vidět, že  $\mathbb{Q}$  s metrikou  $\rho_{\mathbb{Q}}$  není úplný prostor.

**Věta 10** Každá cauchyovská posloupnost je omezená. Jestliže nějaká podposloupnost cauchyovské posloupnosti konverguje, pak samotná posloupnost konverguje a má tutéž limitu.

**Věta 11** Prostor  $\mathbb{R}^k$  je úplný (vybavený metrikou  $\rho_E$  nebo kteroukoliv s ní ekvivalentní).

*Důkaz.* Nejprve dokážeme tvrzení pro  $k = 1$ . Necht'  $\{x_n\}$  je cauchyovská posloupnost v  $\mathbb{R}$ . Je zřejmě omezená a z Bolzanovy–Weierstrassovy věty plyne, že existuje její konvergentní podposloupnost. Z věty 10 plyne, že  $\{x_n\}$  je konvergentní. Nyní vezmeme libovolné  $k \in \mathbb{N}$  a cauchyovskou posloupnost  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^k$ . Označíme  $x_n = (x_{1n}, \dots, x_{kn})$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . Pro každé  $\epsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$  splňující  $m \geq n_0$  a  $n \geq n_0$  platí

$$\rho_E(x_m, x_n) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_{jm} - x_{jn})^2} < \epsilon.$$

Pro každé  $i = 1, \dots, k$  platí

$$|x_{im} - x_{in}| = \sqrt{(x_{im} - x_{in})^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_{jm} - x_{jn})^2} < \epsilon.$$

To tedy znamená, že posloupnosti sestavené z odpovídajících složek jsou také cauchyovské. Protože to jsou opět posloupnosti reálných čísel, dostáváme (z části důkazu pro  $k = 1$ ) existenci limit těchto posloupností, označíme  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{in} = x_i$  pro každé  $i = 1, \dots, k$ . Z věty 7 plyne, že vektor  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je limitou dané posloupnosti, tedy posloupnost  $\{x_n\}$  je konvergentní v  $\mathbb{R}^k$ .  $\square$

---

<sup>0</sup>I v prostoru, který není úplný!

**Věta 12** *Prostor  $C([a, b])$  je úplný.*

*Důkaz.* Necht'  $\{f_n\} \subset C([a, b])$  je cauchyovská posloupnost. Pak pro každé  $\epsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$  splňující  $m, n \geq n_0$  platí

$$\rho_m(f_n, f_m) = \max_{x \in [a, b]} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

z čehož plyne

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \text{pro každé } x \in [a, b].$$

To ale znamená, že posloupnost  $\{f_n\}$  splňuje B–C nutnou a postačující podmínku stejnoměrné konvergence. Existuje tedy funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že  $f_n \rightrightarrows f$  na  $[a, b]$ . Ze stejnoměrné konvergence plyne  $f \in C([a, b])$  a s použitím věty 8 dostáváme, že  $f_n \rightarrow f$  v  $C([a, b])$ .  $\square$

Vyvrcholením tohoto textu je Banachova věta o pevném bodu. Vět o pevných bodech existuje mnoho – jde o poměrně moderní přístup k řešení nejrůznějších problémů matematické analýzy i jiných matematických oborů. Jde např. o řešení úloh pro diferenciální, diferenční rovnice, kde se nalezne prostor, na něm se definuje vhodně zobrazení takové, že jeho pevný bod je právě řešením té vyšetřované úlohy. Tyto věty nám poskytují informaci o existenci řešení, konkrétně Banachova věta nám dává i jednoznačnost – tzn. toto řešení je jediné.

**Věta 13** *(Banachova věta o pevném bodu) Necht'  $(X, \rho)$  je úplný metrický prostor,  $T : X \rightarrow X$  je kontraktivní zobrazení na  $X$ , tzn. existuje  $L \in [0, 1)$  tak, že*

$$\rho(T(x), T(y)) \leq L\rho(x, y) \quad \text{pro každé } x, y \in X.$$

*Pak existuje právě jeden bod  $\bar{x} \in X$  takový, že  $T(\bar{x}) = \bar{x}$  (říkáme, že  $\bar{x}$  je pevný bod zobrazení  $T$ ).*

*Důkaz.* Nejprve dokážeme existenci pevného bodu. Vezmeme libovolný prvek  $x_0 \in X$ . Definujeme posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  vztahem

$$x_n = T(x_{n-1})$$

pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Dokážeme, že tato posloupnost je cauchyovská v  $X$ . Označme  $a = \rho(x_1, x_0)$ . Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, x_n) &= \rho(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq L\rho(x_n, x_{n-1}) = L\rho(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) \\ &\leq L^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq L^n\rho(x_1, x_0) = L^n a \end{aligned}$$

Dále pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m > n$  dostáváme

$$\begin{aligned} \rho(x_m, x_n) &= \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq L^{m-1}a + L^{m-2}a + \dots + L^n a = a \sum_{i=n}^{m-1} L^i \leq a \sum_{i=n}^{\infty} L^i. \end{aligned}$$

Výraz napravo je zbytek v geometrické řadě s kvocientem  $L \in [0, 1)$ , což je konvergentní řada. Z toho plyne, že  $\sum_{i=n}^{\infty} L^i \rightarrow 0$  pro  $n \rightarrow \infty$  (tedy i  $m \rightarrow \infty$  protože  $m > n$ ). To znamená, že  $\rho(x_m, x_n) \rightarrow 0$  pro  $m, n \rightarrow \infty$ . Dokázali jsme, že  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  je Cauchyovská v  $X$ . Protože  $X$  je úplný, existuje limita této posloupnosti, označíme ji  $\bar{x} \in X$ . Dokážeme, že  $\bar{x}$  je pevný bod zobrazení  $T$ . Platí

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho(\bar{x}, T(\bar{x})) &\leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, T(\bar{x})) \leq \rho(x, x_n) + \rho(T(\bar{x}_{n-1}), T(\bar{x})) \\ &\leq \rho(x, x_n) + L\rho(x_{n-1}, \bar{x}) \end{aligned}$$

Z faktu  $x_n \rightarrow \bar{x}$  v  $X$  plyne, že  $\rho(\bar{x}, T(\bar{x})) = 0$ . Z první vlastnosti metriky dostáváme  $T(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Nyní dokážeme jednoznačnost. Necht'  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in X$  jsou pevné body zobrazení  $T$ . Pak platí

$$\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \rho(T(\bar{x}_1), T(\bar{x}_2)) \leq L\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

Z toho vyplývá

$$(1 - L)\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq 0.$$

Protože  $1 - L \in (0, 1]$ , můžeme tímto výrazem nerovnost podělit a dostáváme

$$\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq 0.$$

Vzhledem k vlastnostem metriky to je možné pouze v případě, když  $\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ , což znamená  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ .

*Jiný (možná názornější – kreslete si obrázek) důkaz jednoznačnosti: sporem. Necht'  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in X$  jsou dva různé pevné body zobrazení  $T$ , to znamená*

$$T(\bar{x}_1) = \bar{x}_1, \quad T(\bar{x}_2) = \bar{x}_2, \quad \rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0.$$

*Pak*

$$\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \rho(T(\bar{x}_1), T(\bar{x}_2)) \leq L\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

*Protože  $L < 1$  a  $\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0$  pak výraz v nerovnostech napravo je menší než  $\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , což je nesmysl. Dostáváme tak spor. Musí tedy platit  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ .  $\square$*