Matematická analýza KMI/MA1AI
5. přednáška
Derivace funkce

27. 10. 2008

1 Definice

Příklad 1 Uvažujme funkci $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Chceme najít rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $(0, f(0)) = (0, 1)$.
Řešení. Máme najít rovnici tečny – tedy přímky. Ze střední školy víme, že každá přímka, která není rovnoběžná s osou y je dána rovnicí

$$y = kx + q,$$

kde k, $q \in \mathbb{R}$ (k se nazývá směrnicí přímky – jaký je její geometrický význam?). Tuto tečnu budeme aproximovat sečnami grafu funkce $f(x)$ procházejícími body $(0, 1)$ a $(h, f(h))$, kde $h \neq 0$ (viz tabuli). Pro směrnice těchto sečen bude platit

$$k_h = \frac{f(h) - 1}{h - 0} = \frac{e^h - 1}{h}.$$

Čím bližší bude h nule, tím bližší bude číslo k_h směrnici tečny grafu funkce f v bodě $(0, 1)$. Číslo

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

je směrnice tečny. Číslo q dostaneme jednoduše. Dosadíme do rovnice souřadnice bodu ležící na tečně, například bod o souřadnicích $(0, 1)$. Dostaneme $q = 1$.
Závěr. Tečnou ke grafu funkce $f(x) = e^x$ v bodě $(0, 1)$ je přímka daná rovnicí

$$y = x + 1.$$

Příklad 2 Uvažujme pohybující se hmotný bod (třeba auto). Definujme výraz $s(t)$ jako dráhu uraženou tímto hmotným bodem v časovém intervalu $\langle 0, t \rangle$ (tedy vyjeli jsme v čase $t = 0$, z čehož plyne, že $s(0) = 0$ – to ovšem v tomto příkladě není podstatné). Číslo $s(t)$ lze chápat jako reálnou funkci v proměnné t. Čemu

je rovna okamžitá rychlost $v(t_0)$ bodu v čase t_0.
Řešení. Uvažujme časový interval $\langle t_0, t_0 + h\rangle$. Pak výraz

$$\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$$

udává průměrnou rychlost bodu v časovém intervalu $\langle t_0, t_0+h\rangle$. Jde–li h k nule, blíží se toto číslo k okamžité rychlosti rychlosti bodu v čase t_0

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = v(t_0).$$

Poznámka 3 V obou případech jsme k dané funkci f uvažovali výraz

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \quad \text{nebo–li} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(z věty o limitě složené funkce plyne, že tyto limity jsou stejné). Tuto speciální limitu si pojmenujeme.

Definice 4 Nechť f je funkce definovaná na nějakém okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu $a \in D(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě a derivaci, jestliže existuje limita

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}.$$

Tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě a a značíme

$$f'(a),\ \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x},\ (f(x))'_{|x=a},\dots$$

Je–li tato limita vlastní, mluvíme o vlastní derivaci, pokud je nevlastní, mluvíme o nevlastní derivaci.

Příklad 5 Vypočtěte $f'(0)$ je–li
(a) $f(x) = e^x$, (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Řešení. ad (a)

$$(e^x)'_{|x=0} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^0}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1.$$

ad (b)

$$(\sqrt[3]{x})'_{|x=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} = \infty.$$

Definice 6 Nechť f je funkce definovaná na pravém (resp. levém) okolí $\mathcal{U}^+(a)$ (resp. $\mathcal{U}^-(a)$) bodu a. Řekneme, že funkce f má v bodě a derivaci zprava (resp. zleva) jestliže existuje limita

$$\lim_{t\to a+}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \quad \left(\text{resp. } \lim_{t\to a-}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right).$$

Tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě a zprava (resp. zleva) a značíme $f'_+(a)$ (resp. $f'_-(a)$). Je–li tato limita vlastní – mluvíme o vlastní derivaci, pokud je nevlastní – mluvíme o nevlastní derivace.

Poznámka 7 Z faktu, že derivace funkce v bodě je limita, okamžitě plyne spousta jejích vlastností. Například „Derivace funkce f v bodě a existuje právě tehdy když existují obě jednostranné derivace a jsou si rovny“ nebo „Existuje nejvýše jedna derivace.“

Příklad 8 (a) Vypočtěte $f'(x_0)$, kde $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (f je konstantní funkce).
Řešení. Platí

$$f'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{c-c}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

(b) Vypočtěte $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ pro $f(x) = \operatorname{sgn} x$.
Řešení. Platí

$$f'_+(0) = \lim_{t\to 0+} \frac{\operatorname{sgn} t - \operatorname{sgn} 0}{t-0} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t} = \infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{t\to 0-} \frac{\operatorname{sgn} t - \operatorname{sgn} 0}{t-0} = \lim_{t\to 0-} \frac{-1}{t} = \infty,$$

Z toho plyne, že existuje dokonce i $f'(0) = \infty$.

(c) Vypočtěte $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ pro $f(x) = |x|$.
Řešení. Platí

$$f'_+(0) = \lim_{t\to 0+} \frac{|t| - |0|}{t-0} = \lim_{t\to 0+} \frac{t}{t} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{t\to 0-} \frac{|t| - |0|}{t-0} = \lim_{t\to 0-} \frac{-t}{t} = -1,$$

Z toho plyne, že $f'(0)$ neexistuje.

(d) Vypočtěte $f'(x_0)$, kde $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$.
(e) Vypočtěte $f'(x_0)$, kde $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
(f) Vypočtěte $f'(x_0)$, kde $f(x) = \sin x$.
(g) Vypočtěte $f'(x_0)$, kde $f(x) = \cos x$.

2 Základní věty

Věta 9 *Nechť f, g jsou funkce mající vlastní derivace $f'(a)$, $g'(a)$ v bodě $a \in D(f) \cap D(g)$. Pak platí*

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}, \quad (\textit{je-li } g(a) \neq 0).$$

Důkaz. Dokážeme pouze druhou rovnost. Platí

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{t\to a}\frac{(f\cdot g)(t)-(f\cdot g)(a)}{t-a} = \lim_{t\to a}\frac{f(t)g(t)-f(a)g(a)}{t-a}\\ &= \lim_{t\to a}\frac{f(t)g(t)-f(a)g(t)+f(a)g(t)-f(a)g(a)}{t-a}\\ &= \lim_{t\to a}\left(\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\cdot g(t)+f(a)\frac{g(t)-g(a)}{t-a}\right)\\ &= \lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\cdot\lim_{t\to a}g(t)+f(a)\lim_{t\to a}\frac{g(t)-g(a)}{t-a}\\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Ostatní rovnosti se dokážou podobně. □

Věta 10 *(o derivaci složené funkce) Mají–li funkce f, g vlastní derivace $f'(a)$, $g'(A)$, kde $A=f(a)$, pak funkce $g\circ f$ má vlastní derivaci v bodě a a platí*

$$(g\circ f)'(a) = g'(A)f'(a)\ (= g'(f(a))f'(a)).$$

Důkaz. Mohou nastat dva případy.
(a) Předpokládejme, že

$$(\exists\mathcal{R}_\gamma(a))(\forall t\in\mathcal{R}_\gamma(a))(f(t)\neq f(a)) \tag{1}$$

kde γ je tak malé, že $g\circ f$ je definovaná na $\mathcal{U}_\gamma(a)$. Pak pro každé $t\in\mathcal{R}_\gamma(a)$ platí

$$\frac{(g\circ f)(t)-(g\circ f)(a)}{t-a} = \frac{g(f(t))-g(f(a))}{f(t)-f(a)}\,\frac{f(t)-f(a)}{t-a}. \tag{2}$$

Zřejmě

$$\lim_{t\to a}\frac{(g\circ f)(t)-(g\circ f)(a)}{t-a} = (g\circ f)'(a),$$

pokud tato limita existuje a platí

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(a).$$

Stačí vyšetřit

$$\frac{g(f(t))-g(f(a))}{f(t)-f(a)} = \frac{g(f(t))-g(A)}{f(t)-A}$$

na $\mathcal{R}_\gamma(a)$ (všimněte si, že tento výraz má pro $t\in\mathcal{R}_\gamma(a)$ smysl vždy – kvůli předpokladu (1)). Snadno lze nahlédnout, že

$$\frac{g(f(t))-g(A)}{f(t)-A} = (H\circ f)(t),$$

kde

$$H(y) = \frac{g(y)-g(A)}{y-A}.$$

Protože

$$\lim_{y\to A} H(y) = g'(A),$$

pak podle věty o limitě složené funkce také

$$\lim_{t\to a}(H\circ f)(t) = g'(A) = g'(f(a)).$$

Tedy vzorec platí.

(b) Nyní předpokládejme, že neplatí (1), tzn. platí

$$(\forall \mathcal{R}_\gamma(a))(\exists t \in \mathcal{R}_\gamma(a))(f(t) = f(a)).$$

Tato podmínka je ekvivalentní předpokladu existence posloupnosti $\{t_n\} \subset D(f)$ takové, že $t_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} t_n = a$ a $f(t_n) = f(a)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n) - f(a)}{t_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{t_n - a} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Protože $f'(a)$ existuje a je vlastní, pak nutně (Heine)

$$f'(a) = \lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = 0. \tag{3}$$

Z existence vlastní derivace $g'(A)$ a předchozí věty plyne

$$g'(A)\cdot f'(a) = 0.$$

Stačí tedy dokázat, že také

$$(g\circ f)'(a) = 0.$$

Protože $g'(A)$ je vlastní, existuje $\bar{\gamma} > 0$ a existuje $K > 0$ tak, že

$$\left|\frac{g(y) - g(A)}{y - A}\right| \leq K \qquad \text{pro každé } y \in \mathcal{R}_{\bar{\gamma}}(A).$$

Zvolme $\epsilon > 0$. Z (3) plyne existence $\delta > 0$ tak, že pro každé $t \in \mathcal{R}_\delta(a)$ $(\subset D(f))$ platí

$$\left|\frac{f(t) - f(a)}{t - a} - 0\right| < \frac{\epsilon}{K}.$$

Protože je funkce f v bodě a spojitá, lze δ vzít tak malé, že pro každé $t \in \mathcal{R}_\delta(a)$ platí $f(t) \in \mathcal{R}_{\bar{\gamma}}(A)$ $(\Rightarrow t \in D(g\circ f))$. Pak pro každé $t \in \mathcal{R}_\delta(a)$ platí

$$\frac{(g\circ f)(t) - (g\circ f)(a)}{t - a} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad f(t) = f(a), \\ \frac{g(f(t)) - g(f(a))}{f(t) - f(a)} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} & \text{pro} \quad f(t) \neq f(a). \end{cases}$$

V prvním případě (pro $t \in \mathcal{R}_\delta(a)$)

$$\left|\frac{(g\circ f)(t) - (g\circ f)(a)}{t - a}\right| = |0| = 0 < \epsilon,$$

v druhém případě (pro $t \in \mathcal{R}_\delta(a)$) platí

$$\left|\frac{(g\circ f)(t)-(g\circ f)(a)}{t-a}\right| = \left|\frac{g(f(t))-g(f(a))}{f(t)-f(a)}\right|\left|\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right| < K\cdot\frac{\epsilon}{K} = \epsilon.$$

□

Věta 11 *(o derivaci inverzní funkce) Nechť je f ryze monotonní (tj. rostoucí nebo klesající) a spojitá na $\mathcal{U}(a)$, $a \in D(f)$. Existuje–li vlastní $f'(a) \neq 0$ pak existuje $(f^{-1})'$ v bodě $A = f(a)$ a platí*

$$(f^{-1})'(A) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(A))}.$$

Důkaz. Platí

$$(f^{-1})'(A) = \lim_{z\to A}\frac{f^{-1}(z)-f^{-1}(A)}{z-A} = \lim_{t\to a}\frac{t-a}{f(t)-f(a)} = \lim_{t\to a}\frac{1}{\frac{f(t)-f(a)}{t-a}} = \frac{1}{f'(a)},$$

kde jsme použili substituci $z = f(t)$ (věta o limitě složené funkce). □

Příklad 12 Vypočtěte $(\arcsin y)'_{|y=y_0}$, $y_0 = \sin x_0$, kde $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Podle předchozí věty platí

$$(\arcsin y)'_{|y=y_0} = \frac{1}{(\sin x)'_{|x=x_0}} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}.$$

Definice 13 Nechť má funkce f vlastní derivaci v každém bodě otevřeného intervalu $J \subset D(f)$. Pak derivací funkce f na intervalu J (stručně: derivací funkce f) rozumíme funkci, která každému $x \in M$ přiřadí derivaci funkce f v bodě x. Tuto funkci značíme f', $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Příklad 14 Protože pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ platí $(x^n)'_{|x=x_0} = nx_0^{n-1}$, pro $n \in \mathbb{N}$, pak zřejmě funkce nx_0^{n-1} je derivací funkce x^n na $\mathbb{R}$. Zapisujeme to takto

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Poznámka 15 Z definice derivace (případně z věty o inverzní funkci) lze dokázat

$$(c)' = 0,$$
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}),$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (a > 0),$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad (a > 0, a \neq 1),$$

speciálně

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$
$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

atd.

Příklad 16 Vzhledem k předchozím větám a uvedeným „vzorcům“ pro derivace elementárních funkcí platí např.

$$(x^2+\sin x+1)' = (x^2)' + (\sin x)' + (1)' = 2x + \cos x + 0 = 2x + \cos x,$$

$$(3x^3 - \cos x)' = (3x^3)' - (\cos x)' = 9x^2 + \sin x,$$

$$(x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\sin(\ln x))' = \frac{\mathrm{d}\sin y}{\mathrm{d}y}_{|y=\ln x} \cdot (\ln x)' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned}(\sin(\cos(\ln x))) &= \frac{\mathrm{d}\sin z}{\mathrm{d}z}_{|z=\cos(\ln x)} \cdot \frac{\mathrm{d}\cos y}{\mathrm{d}y}_{|y=\ln x} \cdot (\ln x)' \\ &= \cos(\cos(\ln x)) \cdot (-\sin(\ln x))\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Poznámka 17 Máme–li vypočítat derivaci funkce v konkrétním bodě, nejprve s využitím zmíněných vzorců a pravidel určíme derivaci funkce a pak, do takto získané funkce tento konkrétní bod dosadíme. Například hodnotu $(x^3)'_{|x=1}$ vypočteme tak, že nejprve zderivujeme

$$(x^3)' = 3x^2,$$

a pak dosadíme $x = 1$. Dostáváme $(x^3)'_{|x=1} = 3 \cdot 1^2 = 3$.

3 Derivace vyšších řádů

Definice 18 Nechť má funkce f vlastní derivaci v každém bodě z okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu $a \in D(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě a druhou derivaci, jestliže existuje limita

$$\lim_{t \to a} \frac{f'(t) - f'(a)}{t - a}.$$

Tuto limitu nazýváme druhou derivací funkce f v bodě a a značíme

$$f''(a),\ \frac{\mathrm{d}f^2(a)}{\mathrm{d}x^2},\ f^{(2)}(a).$$

Má–li funkce f druhou (vlastní) derivaci v každém bodě otevřeného intervalu $J \subset D(f)$, pak druhou derivací funkce f na intervalu J (stručně: druhou derivací) rozumíme funkci

$$J \ni x \mapsto f''(x).$$

Značíme tuto funkci symbolem f''.

Poznámka 19 Z definic je vidět, že druhá derivace je rovna derivaci první derivace, tzn.

$$f'' = (f')'.$$

Podobným způsobem definujeme n–tou derivaci.

Definice 20 Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f má vlastní $(n-1)$–ní derivaci v každém bodě z okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu $a \in D(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě a n–tou derivaci, jestliže existuje limita

$$\lim_{t \to a} \frac{f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a)}{t - a}.$$

Tuto limitu nazýváme n–tou derivací funkce f v bodě a a značíme

$$f^{(n)}(a), \ \frac{\mathrm{d}f^n(a)}{\mathrm{d}x^n}.$$

Má–li funkce f n-tou (vlastní) derivaci v každém bodě otevřeného intervalu $J \subset D(f)$, pak n–tou derivací funkce f na intervalu J (stručně: n–tou derivací) rozumíme funkci

$$J \ni x \mapsto f^{(n)}(x).$$

Značíme tuto funkci symbolem $f^{(n)}$.

Příklad 21 Uvažujme funkci $f(x) = x^2 + 2\sin(3x)$. Pak

$$f'(x) = (x^2 + 2\sin(3x))' = 2x + 2\cos(3x) \cdot 3 = 2x + 6\cos(3x),$$

$$f''(x) = (f'(x))' = 2 + 6(-\sin(3x)) \cdot 3 = 2 - 18\sin(3x),$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = -18(-\cos(3x)) \cdot 3 = 54\cos(3x).$$

Doporučená literatura

Kojecká J., Kojecký, T.: Matematická analýza pro 1. semestr, skripta UP, Olomouc, 1997.
KOPÁČEK J. Matematická analýza pro fyziky I. Matfyzpress, Praha, 2005.
DOŠLÁ Z., KUBEN J. Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. MU Brno, 2004. ISBN 80-210-3121-2. Krupková, Fuchs: Matematická analýza 1, elektronický text.