

Matematická analýza KMI/MA1AI
6. přednáška
Derivace funkce – pokračování

3. 11. 2008

1 Symboly o , O

Definice 1 Pro $a \in \mathbb{R}^*$ a f, g definované na $\mathcal{R}(a)$ píšeme

$$\begin{aligned} f = o(g) \quad \text{pro } x \rightarrow a, \quad & \text{jestliže } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \\ f = O(g) \quad \text{pro } x \rightarrow a, \quad & \text{jestliže } (\exists K > 0)(\exists \mathcal{R}(a))(\forall x \in \mathcal{R}(a))(|\frac{f(x)}{g(x)}| < K), \\ f \sim g \quad \text{pro } x \rightarrow a, \quad & \text{jestliže } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Příklad 2 (1) Platí $x^4 = o(x^3)$ pro $x \rightarrow 0$, protože

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

(2) Platí $\sin x \sim x$ pro $x \rightarrow 0$, protože $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2 Diferenciál funkce

Věta 3 Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci rovnou A , pak platí

$$f(x) - f(a) - A(x - a) = o(x - a), \quad x \rightarrow a. \quad (1)$$

Naopak, platí-li (1), pak má funkce f derivaci v bodě a a platí $A = f'(a)$.

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} f'(a) = A \in \mathbb{R} & \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A \\ & \stackrel{A \in \mathbb{R}}{\iff} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{x - a} = 0 \\ & \iff f(x) - f(a) - A(x - a) = o(x - a) \text{ pro } x \rightarrow a. \end{aligned}$$

□

Definice 4 Diferenciálem funkce f v bodě a rozumíme lineární funkci $df(a)(t) = At$ (pro $A \in \mathbb{R}$), pro kterou platí

$$f(a+t) - f(a) - df(a)(t) = o(t) \quad \text{pro } t \rightarrow 0.$$

Z předchozí věty okamžitě plyne následující fakt.

Věta 5 Funkce f má v bodě a diferenciál právě tehdy když má v tomto bodě vlastní derivaci a v takovém případě platí $A = f'(a)$.

Poznámka 6 Jinak řečeno existence diferenciálu v bodě a je ekvivalentní s existencí vlastní derivace. Mohlo by se tedy zdát, že je pojem diferenciálu zbytečný, protože pokud existuje, pak je dán předpisem

$$df(a)(t) = f'(a)t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Skutečně, tento pojem nám u funkce jedné proměnné nepřináší nic moc nového – velkou důležitostí bude mít až diferenciál funkce více proměnných. Geometrický význam diferenciálu – viz tabuli.

3 Vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí

Definice 7 Řekneme, že funkce f je neklesající (rostoucí) v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $\mathcal{R}_\gamma(a)$ tak, že

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^+(a) \quad \text{a} \quad f(x) \geq f(a) \quad \text{pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^-(a) \\ (f(x) < f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^+(a) \quad \text{a} \quad f(x) > f(a) \quad \text{pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^-(a)). \end{aligned}$$

Řekneme, že funkce f je nerostoucí (klesající) v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $\mathcal{R}_\gamma(a)$ tak, že

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^+(a) \quad \text{a} \quad f(x) \leq f(a) \quad \text{pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^-(a) \\ (f(x) > f(a) \text{ pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^+(a) \quad \text{a} \quad f(x) < f(a) \quad \text{pro } x \in \mathcal{R}_\gamma^-(a)). \end{aligned}$$

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ lokální maximum (minimum), jestliže existuje $\mathcal{R}_\gamma(a)$ tak, že

$$f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)) \quad \text{pro } x \in \mathcal{R}_\gamma(a).$$

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ ostré lokální maximum (minimum), jestliže existuje $\mathcal{R}_\gamma(a)$ tak, že

$$f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)) \quad \text{pro } x \in \mathcal{R}_\gamma(a).$$

Lokální maximum a minimum souhrnně nazýváme lokální extrémy. Ostré lokální maximum a minimum souhrnně nazýváme ostré lokální extrémy.

Příklad 8 Funkce $f(x) = x^2$ má ostré lokální minimum v bodě $x = 0$.

Věta 9 *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci (vlastní nebo nevlastní). Pak*
(I) je-li $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), je funkce f v bodě a rostoucí (klesající),
(II) má-li f v bodě a lokální extrém, je $f'(a) = 0$.

Příklad 10 Funkce $f(x) = x^3$ je v bodě $x = 0$ rostoucí, přitom $f'(0) = 0$.

Poznámka 11 Pro danou funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$ budeme definovat výrazy

$$\inf_{\langle a, b \rangle} f, \quad \sup_{\langle a, b \rangle} f, \quad \min_{\langle a, b \rangle} f, \quad \max_{\langle a, b \rangle} f.$$

Definice – viz tabuli.

Věta 12 *(o omezenosti spojitě funkce na kompaktním intervalu) Každá spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)*

(I) je omezená (tzn. $-\infty < \inf_{\langle a, b \rangle} f \leq \sup_{\langle a, b \rangle} f < \infty$),
(II) nabývá na intervalu $\langle a, b \rangle$ svého minima a maxima, tzn. existují $x_{\min}$, $x_{\max} \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$f(x_{\min}) = \min_{\langle a, b \rangle} f, \quad f(x_{\max}) = \max_{\langle a, b \rangle} f.$$

Důkaz. Provedeme pouze (I). Kdyby f nebyla na $\langle a, b \rangle$ omezená, pak bychom našli posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů takových, že $x_n \in \langle a, b \rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a

$$|f(x_n)| \geq n. \quad (2)$$

Protože je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost, existuje podle Weierstrassovy věty (2. přednáška) podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ mající vlastní limitu x_0 . Protože $a \leq x_{k_n} \leq b$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, zřejmě $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Ze spojitosti funkce f plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(x_0).$$

Z předpokladu (2) ale plyne $|f(x_{k_n})| \geq k_n \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$, tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \infty.$$

To je ovšem spor. □

Věta 13 (*Rolle*) *Nechť f je funkce*

(I) *spojitá na $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,*

(II) *má na (a, b) derivaci f' (tzn. má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, b)),*

(III) $f(a) = f(b)$.

Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz. Ze spojitosti funkce f a předchozí věty plyne existence čísel $\min_{\langle a, b \rangle} f$ a $\max_{\langle a, b \rangle} f$. Je-li $\min_{\langle a, b \rangle} f = \max_{\langle a, b \rangle} f$, pak f je zřejmě konstantní funkce. Pak $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$, tzn. ξ lze libovolně zvolit z intervalu (a, b) . Je-li $\min_{\langle a, b \rangle} f < \max_{\langle a, b \rangle} f$, pak funkce f nabývá v alespoň jednom bodě $\xi \in (a, b)$ lokální extrém. Pak $f'(\xi) = 0$. $\square$

Poznámka 14 Stačí, aby jeden z předpokladů věty nebyl splněn a tvrzení věty neplatí. Například

- Funkce $f(x) = |x|$, $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$ nemá derivaci v bodě 0.

- Funkce

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x = -1, \\ x & \text{pro } x \in (-1, 1), \end{cases}$$

není spojitá v bodě -1 zprava.

- Funkce $f(x) = x$, $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$ nesplňuje podmínku (III).

Věta 15 (*Lagrangeova, o přírůstku, o střední hodnotě diferenciálního počtu*)
Nechť f je funkce

(I) *spojitá na $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,*

(II) *má na (a, b) derivaci f' (tzn. má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, b)).*

Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

tzn.

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a).$$

Důkaz. Definujeme funkci

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ověříme, že funkce Φ splňuje předpoklady Rolleovy věty. Funkce Φ je spojitá na $\langle a, b \rangle$,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (a, b), \quad (3)$$

a

$$\Phi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0,$$

$$\Phi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0,$$

tzn.

$$\Phi(a) = \Phi(b)$$

Podle Rolleovy věty pak plyne existence $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$\Phi'(\xi) = 0,$$

tzn. podle (3) platí

$$0 = \Phi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

tedy

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Poznámka 16 K pochopení a zapamatování této věty může posloužit její geometrická interpretace.

Věta 17 (Cauchyova, zobecněná věta o přírůstku) Necht f, g jsou funkce

(I) spojitě na $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

(II) f má na (a, b) derivaci f' ,

(III) g má na (a, b) derivaci g' takovou, že $g'(x) \neq 0$ pro každé $x \in (a, b)$.

Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Důkaz. Kdyby $g(b) = g(a)$, pak by z Rolleovy věty (s využitím faktu, že g je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a má na (a, b) derivaci) plynula existence $\bar{\xi} \in (a, b)$ takového, že $g'(\bar{\xi}) = 0$. To je ovšem ve sporu s třetím předpokladem dokazované věty – tedy $g(b) - g(a) \neq 0$. Položíme

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Podobně jako v důkazu Lagrangeovy věty ověříme, že Φ splňuje předpoklady Rolleovy věty, tzn. že existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $\Phi'(\xi) = 0$, tj.

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi) = 0.$$

Odtud snadno dokážeme, že věta platí.

□

Věta 18 (*l'Hospitalovo pravidlo*) Necht' $a \in \mathbb{R}^*$ a f, g mají na nějakém redukovaném okolí $\mathcal{R}(a)$ první derivace, přičemž $g' \neq 0$ na $\mathcal{R}(a)$. Necht' je navíc splněna jedna z následujících podmínek:

(I) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathcal{R}(a)$,

(II) $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$.

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, pak také platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Věta platí i pro jednostranné limity.

Důkaz. Dokážeme je pro případ (I), $a \in \mathbb{R}$ a pravostrannou limitu, tzn. implikaci

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Předpokládejme, že platí

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Definujeme funkce

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathcal{R}^+(a), \\ 0 & x = a, \end{cases} \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathcal{R}^+(a), \\ 0 & x = a. \end{cases}$$

Pro pevné $x \in \mathcal{R}^+(a)$ tyto funkce $\tilde{f}, \tilde{g}$ splňují předpoklady Cauchyho věty. Existuje tedy $\xi(x) \in (a, x)$ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \frac{f'}{g'}(\xi(x)).$$

Protože $a < \xi(x) < x$, pak také $\lim_{x \rightarrow a+} \xi(x) = a$, a podle věty o limitě složené funkce platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'}{g'}(\xi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'}{g'}(x) = A.$$

Pro ostatní případy viz literaturu. □

Poznámka 19 Předchozí věta nám umožní velmi efektivně počítat neurčité výrazy $0/0$ nebo ∞/∞ . Máme-li vypočítat limitu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$, pak stačí abychom čitatele a jmenovatele zderivovali a určili hodnotu limity $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$ – pokud je to vhodné – derivováním se ovšem výraz často mnohem zjednoduší – viz příklady. Oprávněnost použití této věty je ovšem nutné vždy ověřit. Navíc si všimněte faktu, že pokud nebude existovat $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$, pak tato věta VŮBEC NIC neříká o limitě $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$. Tento fakt se vyjadřuje symbolem $\overset{l'H}{=}$.

Příklad 20 Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}.$$

Řešení. K výpočtu použijeme opakovaně l'Hospitalova pravidla – protože po jeho první aplikaci dostaneme v našem příkladě opět neurčitý výraz.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{3x^2 \cos^2 x} \\ &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cos^2 x \sin x}{6x \cos^2 x - 6x^2 \sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{-3 \cos x}{6 \cos x - 6x \sin x} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Doporučená literatura

KOPÁČEK J. Matematická analýza pro fyziky I. Matfyzpress, Praha, 2005.
 Kojecká J., Kojecký, T.: Matematická analýza pro 1. semestr, skripta UP, Olomouc, 1997.
 DOŠLÁ Z., KUBEN J. Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. MU Brno, 2004. ISBN 80-210-3121-2. Krupková, Fuchs: Matematická analýza 1, elektronický text.